Неравенства и оценки

0. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют условию $x+y \leq 1$. Докажите, что
$$12xy \leq 4x(1-y) + 9y(1-x).$$

1. Положительные числа a, b и c таковы, что $a+b+c=2$. Докажите, что
$$\frac{a^2b+2ab^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2c+2bc^2}{b^2+c^2} + \frac{c^2a+2ca^2}{c^2+a^2} \leq 3.$$

2. Сумма трёх неотрицательных чисел a, b, c не превосходит $\frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение
$$(1-a)(1-b)(1-c)?$$

3. Для положительных чисел a, b, c докажите, что
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

4. $a+b+c=3$, где a, b, c — неотрицательны. Докажите, что
$$\frac{a-1}{a^2+2} + \frac{b-1}{b^2+2} + \frac{c-1}{c^2+2} \leq 0.$$

5. Для положительных чисел x, y, z, w докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{x}{y+z+w}} + \sqrt{\frac{y}{x+z+w}} + \sqrt{\frac{z}{x+y+w}} + \sqrt{\frac{w}{x+y+z}} \geq 2.$$

6. $0 < a,\ b,\ c,\ d \leq 1$. Докажите, что
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2} \geq \frac{1}{4} + (1-a)(1-b)(1-c)(1-d).$$