

## Сумма и разность $n$ -ых степеней

1. Решите уравнение

$$(1 + x + \dots + x^7)(1 + x + \dots + x^5) = (1 + x + \dots + x^6)^2.$$

2. Докажите, что среди чисел  $11, 101, 1001, \dots, 1\underbrace{0\dots0}_{2025}1$  не более 12 простых.
3. При каких натуральных  $n$  число  $n^{2008} + n^2 + 1$  делится на  $n^2 + n + 1$ ?
4. Решите в простых числах уравнение  $p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2$ .
5. (а) Докажите, что  $2^m - 1 \dot{\vdots} 2^n - 1$  тогда и только тогда, когда  $m \dot{\vdots} n$ .  
(б)  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Докажите, что если  $2^n - 1 \dot{\vdots} (2^m - 1)^2$ , то  $n \dot{\vdots} m(2^m - 1)$ .
6. Можно ли число  $2^{58} + 1$  представить в виде произведения трёх натуральных чисел, больших 1.