

Выпуклая оболочка

Выпуклой оболочкой конечного набора не менее, чем из трёх точек, не все из которых лежат на одной прямой, будем называть выпуклый многоугольник с вершинами в некоторых из данных точек, содержащий внутри себя все остальные.

Для точек, лежащих на одной прямой, выпуклой оболочкой будем считать отрезок с концами в «крайних» точках на прямой.

Для одной точки выпуклой оболочкой будем считать её саму.

0. Докажите, что у конечного набора точек:
 - (а) выпуклая оболочка существует;
 - (б) выпуклая оболочка единственна.
1. На плоскости отмечены пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с вершинами в этих точках.
2. На плоскости дано $n \geq 4$ точек. Любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что все точки являются вершинами выпуклого n -угольника.
3. На плоскости отмечены шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно выбрать такие три точки, что у треугольника с вершинами в этих точках есть хотя бы один угол, не больший 30° .
4. На плоскости расположено несколько правильных n -угольников. Докажите, что если для всех их вершин построить выпуклую оболочку, то получится многоугольник, у которого будет не менее n вершин.
5. Докажите, что любой выпуклый многоугольник площади 1 всегда можно поместить в прямоугольник площади 2.
6. Внутри выпуклого 100-угольника выбраны 25 синих точек. Докажите, что можно покрасить 50 вершин исходного многоугольника в красный цвет так, чтобы все синие точки лежали внутри 50-угольника с красными вершинами.