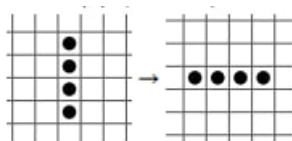


Жёсткие инварианты

0. В таблице 4×4 вторая клетка в верхней строке покрашена в чёрный цвет. Остальные клетки белые. Разрешается одновременно перекрашивать в противоположный цвет все клетки любого столбца, любой строки или любой диагонали (в том числе, угловой диагонали, состоящей из одной клетки). Можно ли такими перекрашиваниями сделать все клетки белыми?
1. На столе лежат 4 кучки из 101, 102, 103 и 104 карандашей. За один ход можно забрать из некоторой кучки 3 карандаша (если они там есть) и разложить их по одному во все остальные кучки. Можно ли за несколько ходов получить кучки с 99, 100, 104 и 107 карандашами?
2. В банке на счету лежит 500 тыс. руб. Система финансового мониторинга ограничила действия со счётом только до двух следующих: можно снять со счёта 300 тыс. руб. и добавить на счёт 198 тыс. руб. Эти операции можно проводить сколько угодно раз, но никаких других денег, кроме тех, которые первоначально лежат в банке, нет. Какую максимальную сумму можно снять со счёта?
3. На бесконечной клетчатой плоскости стоит несколько фишек. За одну операцию разрешается выбрать любые четыре фишки и одновременно сдвинуть одну из фишек на одну клетку вправо, другую — на одну клетку влево, третью — на одну клетку вверх, четвёртую — на одну клетку вниз. При этом все четыре клетки, куда сдвигаются фишки, перед операцией должны быть свободными и различными. Можно ли из одного взаимного расположения фишек получить второе за несколько операций?



4. На доске пишут некоторое натуральное число, меньшее 2007. За одну операцию можно дописать два числа: $2A$ и $3A$, если на доске уже написано число A . Можно ли, начав с некоторого числа, добиться того, чтобы сумма всех чисел на доске будет равна 2007?

5. В строку выписано 250 единиц и двоек - по 125 и тех, и тех. За одну операцию можно взять несколько подряд идущих цифр, среди которых поровну цифр 1 и 2, и переставить цифры в этом куске в обратном порядке, при этом поменяв в этом куске все цифры 1 на цифры 2, а все цифры 2 на цифры 1. (Например, из 12122112 можно одной операцией получить строку 12211212.) Можно ли придумать такую строку из единиц и двоек и выполнить с ней несколько указанных операций, чтобы в результате получилась строка, в которой цифры записаны в обратном порядке?
6. Вася выписывает в ряд 400 натуральных чисел. Первое число он пишет любое, а каждое следующее — либо в 9 раз больше предыдущего, либо в 2 раза меньше предыдущего (при условии, что получается целое число). Может ли сумма всех его чисел оказаться равной 24^{2000} ?
7. На доске написаны числа $0, 1, \sqrt{2}$. Разрешается к любому из этих чисел прибавить разность двух других, умноженную на любое рациональное число. Можно ли такими операциями получить числа $0, 2, \sqrt{2}$?