Разнобой по мотивам Турнира Европы — 2025

1. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде $p - q^2$, где p и q — простые.

2. На доске написаны по одному разу все составные числа, не превосходящие 30. Можно ли стереть три из них, а остальные раскрасить в красный, синий и зелёный цвета так, чтобы произведение всех чисел одного цвета было одним и тем же для красных, синих и зелёных чисел?

3. На турнир приехали 2025 теннисистов. После того, как было проведено 2000 игр, оказалось, что каждый из теннисистов сыграл хотя бы одну игру. При каком наибольшем k можно заведомо утверждать, что найдутся k игр, все $2k$ участников которых различны?

4. Натуральное 2025-значное число n таково, что число, образованное любыми 6 его подряд идущими цифрами, делится на 64 (образованные таким образом числа могут начинаться с 0). Докажите, что n делится на 2^{2025}.

5. Можно ли разделить числа $1, 2, ..., 100$ на два множества так, чтобы количества нечётных чисел в множествах были равны и сумма квадратов чисел в первом множестве отличалась от суммы квадратов чисел во втором множестве на 16?

6. На бесконечной белой клетчатой плоскости конечное число клеток покрашено в черный цвет. Каждую секунду каждая клетка перекрашивается в цвет, который преобладает в квадрате 100×100, для которого она является левым-нижним углом (не считая самой этой клетки). Верно ли, что рано или поздно все черные клетки неминуемо исчезнут?

7. Целые числа a, b и c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Известно, что

$$a + b + c - abc = 2p,$$

где p — простое. Найдите p.