

Инварианты и остатки

0. У Ивана Царевича есть 2 волшебных меча. Одним он может отрубить 21 голову у Змея Горыныча, а другим – 4 головы, но тогда у Змея Горыныча вырастет 60 голов. Может ли Иван убить 100-главого Змея?
 1. По кругу по порядку стоят все натуральные числа от 1 до 100. Разрешается вычитать из двух соседних чисел число, не превосходящее меньшего из них. Можно ли в результате этих действий получить одни нули?
 2. На доске написана тройка чисел $(8, 3, 0)$. Каждую минуту каждое число в тройке одновременно заменяется на остаток от деления на 9 суммы других чисел. Может ли в какой-то момент появиться тройка чисел $(1, 3, 5)$?
 3. На 44 деревьях, расположенных по кругу, сидели 44 чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Могут ли все чижи собраться на одном дереве?
 4. Учитель написал на стене число 0. В первый день один из учеников прибавил число 2 к числу на стене и записал новое число вместо старого. Во второй день другой ученик прибавил $2 \cdot 3$ к уже написанному числу на стене и записал новое число вместо старого. И так далее, в k -ый день очередной ученик прибавлял к числу на стене произведение первых k простых чисел. Найдите все натуральные n такие, что после n дней на стене оказалась степень двойки.
 5. Клетки квадрата 2000×2000 закрашивают по следующим правилам. В любой момент можно закрасить или одиночную клетку, если ни одна из соседних с ней по стороне клеток ещё не закрашена, или прямоугольник 1×2 , если к этому моменту уже закрашены ровно две из соседних по стороне с ним клеток, или квадрат 2×2 , если уже закрашены 8 соседних по стороне с ним клеток. Получится ли закрасить весь квадрат?
-
6. По кругу выписаны числа от 1 до 30. За одну операцию разрешается поменять местами два соседних числа. После нескольких таких операций оказалось, что каждое число переместилось на диаметрально противоположное место. Докажите, что в некоторый момент обязательно менялись местами числа, сумма которых равна 31.
 7. С числом разрешается производить следующие операции:
 - возводить в любую натуральную степень;
 - отрезать последние две цифры, умножить образованное ими число на 3 и прибавить к числу, образованному остальными цифрами.Можно ли с помощью таких операций из числа 81 получить 82?