

## Полезные системы счисления

1. У продавца есть неограниченный запас гирь весом  $1, 2, 4, 8, \dots, 1024$  г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Продавец желает выяснить, правда ли, что батон весит строго больше  $682$  г, но строго меньше  $1365$  г. Может ли он справиться за  $11$  ходов?
  2. У продавца на рынке есть  $32$  арбуза. Каждый час он раскладывает их на две кучи. Какое наименьшее количество часов потребуется, чтобы любые два арбуза хотя бы один раз оказывались в разных кучах? (Спрашивается про существование хотя бы одного способа так раскладывать арбузы, чтобы условие выполнилось.)
  3. Весом натурального числа  $k$  назовём число  $2^k + 1$ . Характеристикой конечного множества натуральных чисел назовем произведение весов его элементов. Докажите, что характеристики двух различных множеств различны.
  4. Алиса и Миша играют в игру. Алиса загадывает десять натуральных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  и не говорит их Мише. После этого Миша может сказать Алисе набор натуральных чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$  и получить от неё в ответ значение  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{10} x_{10}$ . Докажите, что два таких действия Миша сможет угадать все десять загаданных Алисой чисел.
  5. Докажите, что  $64$  города можно соединить дорогами так, чтобы:
    - из каждого города выходило не более  $7$  дорог;
    - между любыми двумя городами был путь, проходящий не более, чем по трём дорогам.
- 
6. Существует ли натуральное число, делящееся на  $2997$ , сумма цифр которого меньше  $27$ ?
  7. В марсианском алфавите  $k$  букв. Два слова называются *похожими*, если в них одинаковое количество букв и они отличаются лишь одной буквой. Докажите, что все слова в языке можно разбить на  $k$  групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.
  8. В стране Экономии правительство хочет выпускать для расчётов только монеты, причём не более  $12$  различных номиналов (на каждой естественно указано натуральное число местных долларов). При этом нужно, чтобы любую стоимость товара, не превосходящую  $6560$  местных долларов, можно было заплатить не более  $8$  монетами (монеты одного номинала могут повторяться). Возможно ли местному центральному банку выпустить такие монеты?