

Полезные системы счисления

1. У продавца есть неограниченный запас гирь весом $1, 2, 4, 8, \dots, 1024$ г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Продавец желает выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?
 2. У продавца на рынке есть 32 арбуза. Каждый час он раскладывает их на две кучи. Какое наименьшее количество часов потребуется, чтобы любые два арбуза хотя бы один раз оказывались в разных кучах? (Спрашивается про существование хотя бы одного способа так раскладывать арбузы, чтобы условие выполнилось.)
 3. Весом натурального числа k назовём число $2^k + 1$. Характеристикой конечного множества натуральных чисел назовем произведение весов его элементов. Докажите, что характеристики двух различных множеств различны.
 4. Алиса и Миша играют в игру. Алиса загадывает десять натуральных чисел x_1, x_2, \dots, x_{10} и не говорит их Мише. После этого Миша может сказать Алисе набор натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{10}$ и получить от неё в ответ значение $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{10} x_{10}$. Докажите, что два таких действия Миша сможет угадать все десять загаданных Алисой чисел.
 5. Докажите, что 64 города можно соединить дорогами так, чтобы:
 - из каждого города выходило не более 7 дорог;
 - между любыми двумя городами был путь, проходящий не более, чем по трём дорогам.
-
6. Существует ли натуральное число, делящееся на 2997 , сумма цифр которого меньше 27 ?
 7. В марсианском алфавите k букв. Два слова называются *похожими*, если в них одинаковое количество букв и они отличаются лишь одной буквой. Докажите, что все слова в языке можно разбить на k групп, в каждой из которых все слова не похожи друг на друга.
 8. В стране Экономии правительство хочет выпускать для расчётов только монеты, причём не более 12 различных номиналов (на каждой естественно указано натуральное число местных долларов). При этом нужно, чтобы любую стоимость товара, не превосходящую 6560 местных долларов, можно было заплатить не более 8 монетами (монеты одного номинала могут повторяться). Возможно ли местному центральному банку выпустить такие монеты?