

Куски сыра

0. Первоначально имеется один кусок сыра. Разрешается взять любой кусок сыра и проделать с ним одну из трех операций: разделить его на два куска одинакового веса, 11 кусков одинакового веса или 23 куска одинакового веса. Можно ли, используя только эти операции, разделить его на 2024 части одинакового веса?
1. Трём воронам достались три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса решила им помочь «поделить» сыр поровну. Она может от любых двух кусочков одновременно откусить и съесть по 1 г сыра. Сможет ли лиса оставить воронам равные (ненулевые) кусочки сыра?
2. Есть 20 кусков сыра двух весов. Докажите, что можно съесть один кусок, а часть из остальных (но не все) разрезать каждый на три равные части так, чтобы все имеющиеся куски были не более чем двух весов и их можно было бы разложить на три равные по весу кучки.
3. Есть 9 кусков сыра, массы любых двух из которых отличаются. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусков можно было разложить на двухчашечные весы, по 5 кусков на каждую чашку, чтобы веси при этом были в равновесии?
4. Великаны Петя и Вася делят стопудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две произвольные части. Затем Вася делит на две части одну из них. Потом снова одну из частей делит Петя. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася — остальные. Какой наибольший вес может гарантировать себе Петя, как бы ни действовал Вася?

5. Из 99 кусков сыра нужно выбрать 50 так, чтобы их суммарный вес был больше веса невыбранных кусков. Докажите, что это можно сделать не менее, чем 2^{49} способами.
6. У Васи и Пети есть один кусок сыра весом 100 кг на двоих. Сначала Вася разрезает сыр на два куска, затем Петя режет любой из получившихся кусков на два и так далее, пока всего не получится 5 кусков. После этого Вася забирает себе один кусок, потом Петя — один из оставшихся кусков и так они разбирают все 5 кусков. Для каждого из них определите какое гарантированное количество сыра он может получить.
7. У Пончика есть один кусок лунсыра и заданное число N . Пончик может разрезать один из имеющихся кусков на два с условием: после каждого разрезания для любых двух кусков лунсыра с массами a и b верно $\frac{a}{b} > N$.
- (а) Докажите, что при $N = \frac{1}{2}$ Пончик придумать стратегию, чтобы резать лунсыр бесконечно.
- (б) Докажите, что при $N > \frac{1}{2}$ не получится резать лунсыр бесконечно.
- (в) Какое наибольшее число кусков лунсыра Пончик получит при $N = \frac{3}{5}$?