

Составление уравнений в целых числах

1. У продавца есть по 20 монет в 1, 2, 3, \dots , 20 тугриков. Он выбрал из них 18 монет и сложил в два столбика. Продавец утверждает, что какую бы сдачу от 1 до 100 тугриков от него ни потребовали, он сможет выдать её, сняв монеты сверху одного или двух столбиков. Могут ли слова продавца быть правдой?
2. На столе стояли 20 кувшинов с лимонадом: по четыре объёмом 0,2 л, 0,4 л, 0,6 л, 0,8 л, и 1 л. Максим и Миша пришли на праздник раньше остальных. Максим выпил десять кувшинов, а Миша — восемь. Оказалось, что Максим выпил лимонада в $5/4$ раза больше Миши. Сколько лимонада осталось остальным гостям праздника?
3. Номер телефона Джейн — 395322, а Ирэн — 435903. Если разделить эти номера на трёхзначный код города, где они живут, получатся одинаковые остатки, равные двузначному коду страны, где они живут. В какой стране живут девушки? (Достаточно найти код страны.)
4. Учительница не закрыла электронный журнал и дети стали выставлять туда оценки. Каждая девочка поставила 18 пятёрок, а каждый мальчик — 11 двоек. В результате у каждой девочки появилось 7 оценок, а у каждого мальчика — 21 оценка. Кого больше в классе: мальчиков или девочек?
5. У прямоугольного параллелепипеда линейные размеры равны $a \times b \times c$, где a, b, c — натуральные числа. Каждую сторону параллелепипеда увеличили на одно и то же натуральное число k так, чтобы площадь поверхности параллелепипеда увеличилась на 122. Какими могут быть a, b, c ?

6. В школьном туре олимпиады по технологии участвовало 9000 школьников. Каждый из них получил оценку от 0 до 15 баллов. При занесении в компьютер оценки 12, 13 или 14 баллов были заменены на 15 баллов, а оценки 1, 2 или 3 балла — на 0 баллов. Остальные оценки не менялись. В результате средний балл всех участников уменьшился на 0,1. Докажите, что до исправления можно было указать две такие оценки a и b , что число школьников с оценкой a баллов и число школьников с оценкой b баллов отличались не менее, чем на 150.
7. В компании у каждого ровно 20 знакомых. У любых двух знакомых друг с другом людей ровно один общий знакомый, а у любых двух незнакомых друг с другом людей — ровно 6 общих знакомых. Сколько всего человек в компании?
8. На доске написаны три положительных числа x , y , z . Разрешается стереть одно из них (скажем z) и заменить на $\frac{1}{zx + zy}$. Можно ли такими операциями из набора 2, 3, 6 получить набор 2, 3, 4?