

Двудольные графы

Определение. Граф называется двудольным если его вершины можно раскрасить в 2 цвета так, что любые 2 смежные вершины покрашены в разные цвета.

Критерий двудольности. Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нём нет нечётных циклов.

1. Какое наибольшее количество рёбер может быть в двудольном графе, в котором вершин **а)** $2n$ **б)** $2n + 1$?
2. Докажите, что периметр любого клетчатого многоугольника со сторонами вдоль линий сетки чётен.
3. В классе больше 30, но меньше 40 учеников. Каждый мальчик дружит с 3 девочками, а каждая девочка — с 5 мальчиками. Сколько учеников в классе?
4. На плоскости провели несколько окружностей. Докажите, что части, на которые разбилась плоскость, можно покрасить в 2 цвета так, чтобы никакие 2 части, имеющие общую дугу, не были покрашены в один цвет.
5. Помещение в форме правильного треугольника со стороной 10 разбито на 100 треугольных комнат со стороной 1. В каждой стене между комнатами есть дверь. Какое наибольшее число комнат можно обойти, не заходя ни в какую комнату дважды?
6. В чемпионате по футболу играют 20 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
7. Дано 405 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение любых двух одноцветных чисел не является простым числом.
8. Можно ли на доске 2024×2024 расставить 803 коней, так чтобы каждый бил четырёх других?
9. В вершинах графа G записали по числу, потом на каждом ребре записали сумму чисел на его концах, потом все числа в вершинах стерли. При каких G все числа в вершинах можно однозначно восстановить?