

Сравнения по модулю-2

0. (а) Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $s = a + b + c + d$ — составное.
- (б) Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ab = cd$. Докажите, что число $a^{2024} + b^{2024} + c^{2024} + d^{2024}$ — составное.
1. Даны натуральные числа $a > b$ и $c > d$. Докажите, что если $a + b + c + d = ab - cd$, то число $a + c$ — составное.
2. Пусть a, b, c, d — натуральные числа такие, что $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Докажите, что $a + b + c + d$ — составное.
3. Натуральные числа a и b , большие 1, таковы, что $a^2 + b^2 - 1$ делится на $a + b - 1$. Докажите, что $a + b - 1$ — составное число.
4. a, b, c, d — такие натуральные числа, что $abc + abd + acd + bcd$ делится на $s = a + b + c + d$. Докажите, что число s — составное.
5. (а) Докажите, что $a^{10} + a^5 + 1$ делится на $a^2 + a + 1$ при натуральном a .
(б) Докажите, что $(a^2 + 1)^{100} - a$ делится на $a^2 + a + 1$.
(в) Пусть a — натуральное число. Докажите, что число

$$(a^2 + 1)^3 + 2(a^2 + 1)^6 + \dots + 2n(a^2 + 1)^{6n}$$

делится на $a^2 - a + 1$ тогда и только тогда, когда n делится на $a^2 - a + 1$.

6. Для натуральных чисел a, b, c известно, что $a^2 - bc$ есть точный квадрат. Докажите, что $2a + b + c$ — составное.
7. *Репьюнитом* называется число, десятичная запись которого состоит только из единиц, то есть число вида $1, 11, 111, \dots$. Петя перемножил 2024 различных репьюнита, и Вася перемножил 2024 различных репьюнита. Оказалось, что произведения совпали. Докажите, что Петя и Вася перемножали одни и те же наборы репьюнитов.