Сравнения по модулю

Определение. Два целых числа a и b называются *сравнимыми по натуральному модулю* n, если их разность делится на n.

Обозначение сравнимости a и b по модулю n. $a \equiv b \pmod{n}$ или $a \underset{n}{\equiv} b$.

Ключевая идея. $a \equiv b \pmod{a-b}$ и $a \equiv -b \pmod{a+b}$.

Свойства сравнимости. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$, то:

- $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
- $a - c \equiv b - d \pmod{n}$
- $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$
- $a^m \equiv b^m \pmod{n}$ для любого натурального m
- $a \equiv b \pmod{\frac{n}{k}}$, если n делится на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{\frac{n}{k}}$, если a, b, n делятся на k
- $\frac{a}{k} \equiv \frac{b}{k} \pmod{n}$, если a и b делятся на взаимно простое с n число k

0. Докажите, что $3^{100} - 2^{100}$ делится на $3^{10} + 2^{10}$.

1. $a + 2c$ и $b + 3d$ делятся на n. Докажите, что $ab - 6cd$ делится на n.

2. Докажите, что $(3^n + 1)^n - 2$ делится на $3^n - 2$.

3. **(а)** $\left(4a^2 - 1\right)^2$ делится на $4ab - 1$. Докажите, что $(a - b)^2$ — тоже.
(б) $n^3 + 1$ делится на $mn - 1$. Докажите, что $m^3 + 1$ — тоже.

4. Целые числа a, b, c, d, e и простое p таковы, что числа $a^2 - b, a^3 - c, c^5 - d, b^7 - e$ делятся на p. Докажите, что число $ae - d$ тоже делится на p.

5. **(а)** Для какого наибольшего натурального n число $n^3 + 7n^2 - 2n + 100$ делится на число $n + 10$?
(б) При каких целых m число $2m^2 - 3m + 1$ делится на $3m - 2$?

6. a, b, c — натуральные числа. Число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что числа $ac - a + 1$ и $bc - c + 1$ тоже делятся на $ab - b + 1$.