1.1 Перед новым годом Винни-Пух весил в 9 раз больше Пяточка. Во время праздников Винни сначала поправился на 20%, а потом похудел на 20%, а Пятачок сначала похудел на 10%, а потом поправился на 60%. Во сколько раз Винни-Пух теперь весит больше Пяточка? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: в 6 раз.
Решение: Пусть изначально вес Винни был $9x$, а Пяточка - x. Тогда после праздников вес Винни стал $9x \cdot 1,2 \cdot 0,8$, а вес Пяточка $x \cdot 0,9 \cdot 1,6$, и Винни весит в $\frac{9x \cdot 1,2 \cdot 0,8}{x \cdot 0,9 \cdot 1,6} = 6$ раз больше.

1.2 Перед новым годом Винни-Пух весил в 9 раз больше Пяточка. Во время праздников Винни сначала поправился на 50%, а потом похудел на 20%, а Пятачок сначала похудел на 10%, а потом поправился на 60%. Во сколько раз Винни-Пух теперь весит больше Пяточка? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: в 7,5 раз.

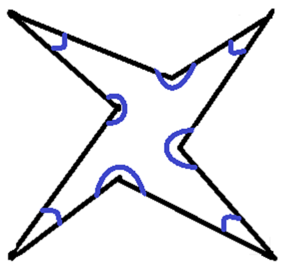
1.3 Перед новым годом Винни-Пух весил в 9 раз больше Пяточка. Во время праздников Винни сначала поправился на 40%, а потом похудел на 40%, а Пятачок сначала похудел на 30%, а потом поправился на 20%. Во сколько раз Винни-Пух теперь весит больше Пяточка? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: в 9 раз.

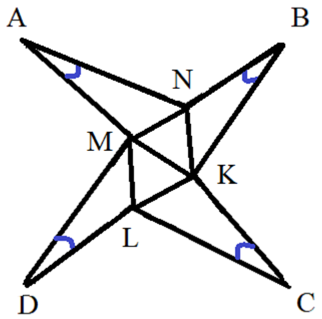
1.4 Перед новым годом Винни-Пух весил в 7 раз больше Пяточка. Во время праздников Винни сначала поправился на 20%, а потом похудел на 40%, а Пятачок сначала похудел на 30%, а потом поправился на 60%. Во сколько раз Винни-Пух теперь весит больше Пяточка? При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: в 4,5 раз.

2 Найдите сумму всех восьми отмеченных на рисунке углов.



Ответ: 1080.



Решение:
Разделим фигуру на треугольники как на рисунке. Тогда нужные нам восемь углов распались на 18 уголков шести получившихся треугольников. Значит их сумма равна $180° \cdot 6 = 1080°$.

3.1 На острове живут аборигены, которые всегда говорят правду знакомым и всегда врут незнакомым. Однажды собрались 50 аборигенов и каждый сказал каждому одну из двух фраз: "У меня четное число знакомых в этой компании"или "У меня нечетное число знакомых в этой компании". Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

Ответ: 2400.

Решение: Каждый абориген сказал 49 фраз. Заметим, если у него четное количество знакомых, то он сказал первую фразу только им, то есть не более 48 раз. Если у него нечетное количество знакомых, то он сказал первую фразу только незнакомых, а их четное количество, то есть тоже не более 48. Таким образом каждый абориген сказал первую фразу не более 48 раз, а всего она была произнесена не более $50 \cdot 48 = 2400$ раз. Приведем пример. Разделим 50 аборигенов на 25 пар. В каждой паре аборигены незнакомы, а все остальные между собой знакомы.

3.2 На острове живут аборигены, которые всегда говорят правду знакомым и всегда врут незнакомым. Однажды собрались 40 аборигенов и каждый сказал каждому одну из двух фраз: "У меня четное число знакомых в этой компании"или "У меня нечетное число знакомых в этой компании". Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

Ответ: 1520.

3.3 На острове живут аборигены, которые всегда говорят правду знакомым и всегда врут незнакомым. Однажды собрались 60 аборигенов и каждый сказал каждому одну из двух фраз: "У меня четное число знакомых в этой компании"или "У меня нечетное число знакомых в этой компании". Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

Ответ: 3480.

3.4 На острове живут аборигены, которые всегда говорят правду знакомым и всегда врут незнакомым. Однажды собрались 70 аборигенов и каждый сказал каждому одну из двух фраз: "У меня четное число знакомых в этой компании"или "У меня нечетное число знакомых в этой компании". Какое наибольшее количество раз могла быть произнесена первая фраза?

Ответ: 4760.

4.1 У Вовочки есть 140 зеленых и 140 красных шариков. Чтобы показать фокус, Вовочка разложил все шарики в два мешка - черный и белый. В черном мешке зеленых шариков в два раза больше, чем красных. В белом мешке количество красных шариков кратно количеству зеленых. Пустых мешков нет. Сколько зеленых шариков в черном мешке? Перечислите все возможные варианты.

Ответ: 112, 120, 136.
Решение: Из условия следует, что в черном мешке четное количество зеленых шариков, а значит и в белом тоже. Пусть в белом мешке $2x$ зеленых шариков. Тогда в черном $140-2x$ зеленых и $70-x$ красных, а в белом $70+x$ красных. По условию $(70+x)\vdots(2x)$, откуда следует, что x четно и является делителем 70. Значит $x=2;10;14$. Тогда искомое количество шариков $140-2x=112;120;136$.

4.2 У Вовочки есть 60 зеленых и 60 красных шариков. Чтобы показать фокус, Вовочка разложил все шарики в два мешка - черный и белый. В черном мешке зеленых шариков в два раза больше, чем красных. В белом мешке количество красных шариков кратно количеству зеленых. Пустых мешков нет. Сколько зеленых шариков в черном мешке? Перечислите все возможные варианты.

Ответ: 40, 48, 56.

4.3 У Вовочки есть 84 зеленых и 84 красных шариков. Чтобы показать фокус, Вовочка разложил все шарики в два мешка - черный и белый. В черном мешке зеленых шариков в два раза больше, чем красных. В белом мешке количество красных шариков кратно количеству зеленых. Пустых мешков нет. Сколько зеленых шариков в черном мешке? Перечислите все возможные варианты.

Ответ: 56, 72, 80.

4.4 У Вовочки есть 132 зеленых и 132 красных шариков. Чтобы показать фокус, Вовочка разложил все шарики в два мешка - черный и белый. В черном мешке зеленых шариков в два раза больше, чем красных. В белом мешке количество красных шариков кратно количеству зеленых. Пустых мешков нет. Сколько зеленых шариков в черном мешке? Перечислите все возможные варианты.

Ответ: 88, 120, 128.

5.1 В четвертой слева клетке нижней строки доски 9×9 стоит слон. Сколькими способами он может попасть во вторую слева клетку в верхней строке, если будет ходить только по диагоналям вверх-вправо и вверх-влево?

Ответ: 48.

Решение: Заметим, что в каждую клетку слон может попасть либо через клетку на единицу ниже и левее, либо через клетку на единицу ниже и правее, а значит количество способов попасть в очередную клетку равно сумме способов попасть в указанные клетки. Посчитаем искомое количество способов, заполнив таблицу как на рисунке.

	48		69		56		27	
14		34		35		21		6
	14		20		15		6	
4		10		10		5		1
	4		6		4		1	
1		3		3		1		
	1		2		1			
		1		1				
			1					

5.2 В четвертой слева клетке нижней строки доски 9×9 стоит слон. Сколькими способами он может попасть в четвертую слева клетку в верхней строке, если будет ходить только по диагоналям вверх-вправо и вверх-влево?

Ответ: 69.

5.3 В третьей слева клетке нижней строки доски 9×9 стоит слон. Сколькими способами он может попасть в пятую слева клетку в верхней строке, если будет ходить только по диагоналям вверх-вправо и вверх-влево?

Ответ: 55.

5.4 В третьей слева клетке нижней строки доски 9×9 стоит слон. Сколькими способами он может попасть в третью слева клетку в верхней строке, если будет ходить только по диагоналям вверх-вправо и вверх-влево?

Ответ: 62.

6.1 На доске написаны пять чисел в порядке возрастания. Разность между двумя последовательными числами в два раза больше разности между предыдущей парой последовательных чисел. Например, разность между третьим и вторым числом в два раза больше разности между вторым и первым. Среднее арифметическое всех пяти чисел на 110 больше третьего числа. Сумма второго и четвертого равна наибольшему. Чему может быть равно пятое число?

Ответ: 1100.
Решение: Обозначим третье число за a, а второе за $a-2d$. Тогда по условию на разности первое число $a-3d$, четвертое $a+4d$, а пятое $a+12d$. Их среднее арифметическое равно $a+\frac{11}{5}d$, что на 110 больше a, то есть $\frac{11}{5}d=110$ и $d=50$. Сумма второго и четвертого равна пятому, то есть $2a+2d=a+12d, a=10d, a+12d=22d=1100$.

6.2 На доске написаны пять чисел в порядке возрастания. Разность между двумя последовательными числами в два раза больше разности между предыдущей парой последовательных чисел. Например, разность между третьим и вторым числом в два раза больше разности между вторым и первым. Среднее арифметическое всех пяти чисел на 66 больше третьего числа. Сумма второго и четвертого равна наибольшему. Чему может быть равно пятое число?

Ответ: 660.

6.3 На доске написаны пять чисел в порядке возрастания. Разность между двумя последовательными числами в два раза больше разности между предыдущей парой последовательных чисел. Например, разность между третьим и вторым числом в два раза больше разности между вторым и первым. Среднее арифметическое всех пяти чисел на 99 больше третьего числа. Сумма второго и четвертого равна наибольшему. Чему может быть равно пятое число?

Ответ: 990.

6.4 На доске написаны пять чисел в порядке возрастания. Разность между двумя последовательными числами в два раза больше разности между предыдущей парой последовательных чисел. Например, разность между третьим и вторым числом в два раза больше разности между вторым и первым. Среднее арифметическое всех пяти чисел на 55 больше третьего числа. Сумма второго и четвертого равна наибольшему. Чему может быть равно пятое число?

Ответ: 550.

7.1 Квадрат числа имеет 45 делителей, а куб этого числа – 88 делителей. Сколько делителей у четвертой степени этого числа?

Ответ: 145.
Решение: Если число раскладывается на простые множители в виде $X=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_k^{a_k}$, то количество его делителей можно посчитать по формуле $(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_k+1)$.

Квадрат числа записывается как $X^2 = p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \dots p_k^{2a_k}$, а куб - $X^3 = p_1^{3a_1} \cdot p_2^{3a_2} \dots p_k^{3a_k}$, а количество их делителей $(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_k+1)$ и $(3a_1+1)(3a_2+1)\dots(3a_k+1)$ соответственно. Рассмотрим все возможные разложения 45 на множители: $45 = 5 \cdot 9 = 3 \cdot 15 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Этим разложениям соответствуют числа вида $p^{22}; p^2 \cdot q^4; p \cdot q^7; p \cdot q \cdot r^2$. Проверяя количество делителей кубов этих чисел, получаем, что нам подходит только число $p \cdot q^7$, четвертая степень этого числа записывается $p^4 \cdot q^{28}$ и имеет 145 делителей.

7.2 Квадрат числа имеет 45 делителей, а куб этого числа – 91 делитель. Сколько делителей у четвертой степени этого числа?

Ответ: 153.

7.3 Квадрат числа имеет 75 делителей, а куб этого числа – 148 делителей. Сколько делителей у четвертой степени этого числа?

Ответ: 245.

7.4 Квадрат числа имеет 75 делителей, а куб этого числа – 154 делителя. Сколько делителей у четвертой степени этого числа?

Ответ: 261.

8 Сколько решений в целых числах имеет уравнение $x^4 + 8y^2 + 425 = y^4 + 42x^2$?

Ответ: 16.
Решение: Преобразуем выражение, выделив полные квадраты: $(x^2-21)^2 = (y^2-4)^2$. Отсюда $x^2 - 21 = y^2 - 4$ или $x^2 - 21 = -(y^2-4)$, $x^2 + y^2 = 25$ или $x^2 - y^2 = 17$. Первое уравнение имеет по 4 решения вида $(\pm3; \pm4)$ и $(\pm4; \pm3)$, по 2 решения вида $(\pm5; 0)$ и $(0; \pm5)$. Второе уравнение раскладывается на множители $(x-y)(x+y) = 17$. Если бы числа x, y были натуральными, в силу простоты числа 17 уравнение имело бы решение только в случае $x - y = 1, x + y = 17$, то есть $x = 9, y = 8$. Тогда в случае целых чисел уравнение имеет 4 решения вида $(\pm9; \pm8)$. Всего получается 16 решений.

9.1 На доску в порядке возрастания выписывают натуральные числа, состоящие только из четных цифр. Какое число будет выписано 474-ым?

Ответ: 6688.
Решение: Заметим, что однозначное четное число a на доске будет стоять на $\frac{a}{2}$ месте. Двузначное число $a0$ будет стоять на $\frac{a}{2} \cdot 5$ месте, т.к. последняя цифра может принимать 5 разных значений, трехзначное $a00$ будет стоять на $\frac{a}{2} \cdot 5 \cdot 5$ месте, а четырехзначное $a000$ на $\frac{a}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ месте. Тогда число $abcd$ стоит на $\frac{a}{2} \cdot 125 + \frac{b}{2} \cdot 25 + \frac{c}{2} \cdot 5 + \frac{d}{2}$ месте. Тогда, чтобы определить число по его номеру, по сути нужно представить номер в пятиричной системе исчисления. $474 = 3 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 4$, то есть соответствует числу 6688.

9.2 На доску в порядке возрастания выписывают натуральные числа, состоящие только из четных цифр. Какое число будет выписано 195-ым?

Ответ: 2480.

9.3 На доску в порядке возрастания выписывают натуральные числа, состоящие только из четных цифр. Какое число будет выписано 517-ым?

Ответ: 8064.

9.4 На доску в порядке возрастания выписывают натуральные числа, состоящие только из четных цифр. Какое число будет выписано 371-ым?

Ответ: 4882.

10.1 Двадцать прямых, среди которых нет параллельных, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу десять прямых, еще в одной – пять, а во всех остальных только по две прямые. Найти N.

Ответ: 137.
Решение: Если бы в каждой точке пересекалось только по 2 прямые, всего точек было бы $\frac{20\cdot19}{2} = 190$. Т.к. десять прямых пересеклись в одной точке, мы вместо $\frac{10\cdot9}{2} = 45$ точек имеем только одну, то есть 44 потеряли. Аналогично для пяти прямых потеряли $\frac{5\cdot4}{2} - 1 = 9$ точек. Значит $N = 190 - 44 - 9 = 137$.

10.2 Двадцать прямых, среди которых нет параллельных, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу двенадцать прямых, еще в одной – четыре, а во всех остальных только по две прямые. Найти N.

Ответ: 120.

10.3 Двадцать прямых, среди которых нет параллельных, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу тринадцать прямых, еще в одной – шесть, а во всех остальных только по две прямые. Найти N.

Ответ: 99.

10.4 Двадцать прямых, среди которых нет параллельных, пересекаются в N точках. В одной из точек пересекается сразу девять прямых, еще в одной – семь, а во всех остальных только по две прямые. Найти N.

Ответ: 135.

11.1 Шахматная фигура тушканчик бьет клетки через одну или через две вверх, вниз, влево и вправо - всего 8 клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга тушканчиков можно расставить на доске 30×30?

Ответ: 360.
Решение: Заметим, что в прямоугольничке 1×5 может стоять не более 2 тушканчиков. Доску 30×30 можно разрезать на 180 непересекающихся прямоугольничков 1×5, значит тушканчиков не более $2 \cdot 180 = 360$. Пример можно получить, распространив шаблон ниже на всю доску.

т				т
т	т			
	т	т		
		т	т	
			т	т

11.2 Шахматная фигура тушканчик бьет клетки через одну или через две вверх, вниз, влево и вправо - всего 8 клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга тушканчиков можно расставить на доске 50×50?

Ответ: 1000.

11.3 Шахматная фигура тушканчик бьет клетки через одну или через две вверх, вниз, влево и вправо - всего 8 клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга тушканчиков можно расставить на доске 40×40?

Ответ: 640.

11.4 Шахматная фигура тушканчик бьет клетки через одну или через две вверх, вниз, влево и вправо - всего 8 клеток. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга тушканчиков можно расставить на доске 20×20?

Ответ: 160.

12.1 Назовем человека странным, если у него есть не менее 20 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Назовем человека обычным, если у него есть не менее 20 знакомых, причем хотя бы двое из них знакомы между собой. Какое наибольшее число людей может быть в компании, в которой нет ни странных, ни обычных людей?

Ответ: 40.

Решение: Пусть нашелся человек , у которого хотя бы 20 знакомых. По условию он не является обычным, значит все его знакомые незнакомы между собой. Значит их не более 20, т.к. иначе любой из них был бы странным. Аналогично если у есть хотя бы 20 незнакомых, они должны быть все знакомы друг с другом, и если их хотя бы 21, то все они обычные, что невозможно. Пусть в компании хотя бы 41 человек. Тогда у человека должно быть ровно 20 знакомых и ровно 20 незнакомых, причем все его знакомые незнакомы между собой, а все его незнакомые - знакомы между собой. Пусть один из его знакомых а один из незнакомых . Если и знакомы между собой, то - обычный, а если и незнакомы, то - странный. И то, и другое противоречит условию. Значит в компании не более 40 людей. Пример можно построить, разделив 40 человек на две группы по 20, внутри каждой группы все со всеми знакомы, а между группами знакомств нет.

12.2 Назовем человека странным, если у него есть не менее 30 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Назовем человека обычным, если у него есть не менее 30 знакомых, причем хотя бы двое из них знакомы между собой. Какое наибольшее число людей может быть в компании, в которой нет ни странных, ни обычных людей?

Ответ: 60.

12.3 Назовем человека странным, если у него есть не менее 40 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Назовем человека обычным, если у него есть не менее 40 знакомых, причем хотя бы двое из них знакомы между собой. Какое наибольшее число людей может быть в компании, в которой нет ни странных, ни обычных людей?

Ответ: 80.

12.4 Назовем человека странным, если у него есть не менее 50 незнакомых, причем хотя бы двое из них незнакомы между собой. Назовем человека обычным, если у него есть не менее 50 знакомых, причем хотя бы двое из них знакомы между собой. Какое наибольшее число людей может быть в компании, в которой нет ни странных, ни обычных людей?

Ответ: 100.