Цепи — вложенные множества

0. В олимпиаде участвовали 49 школьников. Им было предложено решить 3 задачи. Каждая задача оценивалась от 0 до 7 баллов. Докажите, что найдутся два школьника, первый из которых получил за каждую задачу не меньше баллов, чем второй.

1. В коробке лежат 82 карандаша, причём любые два отличаются длиной или цветом (либо и длиной, и цветом). Докажите, что среди них есть либо 10 попарно разного цвета, либо 10 попарно разной длины.

2. Из натуральных чисел от 1 до 50 случайным образом выбрали n чисел.
   а) При каком минимальном n среди выбранных чисел точно найдутся два таких, что одно делится на другое?
   б) Тот же вопрос, если нужно, чтобы среди выбранных чисел точно нашлись три числа таких, что первое делится на второе, а второе — на третье.

3. 11 школьников записались в 5 спортивных клубов. Докажите, что среди них есть двое таких, что во все клубы, в которые записался первый, записался и второй.

4. Боря выбрал из целых чисел от 0 до 1000 ровно 101 число, записал их на листе и дал Владу. Влад выписал на доску все их попарные разности (из большего вычитается меньшее). Докажите, что Коля среди чисел на доске сможет найти хотя бы десять различных, которые не превосходят 100.

5. В квадрате провели $2(n-1)$ прямых, параллельных его сторонам: $n-1$ прямая параллельна одной паре сторон и $n-1$ прямая параллельна другой паре сторон, — разбивающих его на n^2 прямоугольников. Докажите, что можно выбрать $2n$ прямоугольников так, что для любой пары выбранных прямоугольников один можно было поместить внутрь другого.

6. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на 4, 5 или 9.

7. Серёжа выбрал натуральное число n и на 2^n карточках записал красной ручкой все возможные наборы, которые получаются из натуральных чисел от 1 до n. После этого Максим выбрал натуральное число m такое, что при любом разложении Серёжиных карточек в две кучи, Максим всегда сможет выбрать в одной из куч 2^m карточек и написать на них зелёной ручкой все возможные наборы из натуральных чисел от 1 до m так, чтобы выполнялось следующее условие:
   — для любых двух выбранных Максимом карточек если все зелёные числа первой карточки содержатся среди зелёных чисел второй карточки, то и все красные числа первой карточки есть среди красных чисел второй.
   Докажите, что $n \geq 2m$.