Разнобой по мотивам турнира Колмогорова

1. По кругу расставили 6 разных натуральных чисел так, что каждые два соседних числа взаимно просты и произведение каждых двух противоположных чисел кратно 3. Найдите наименьшую возможную сумму расставленных чисел.

2. Простое число $p > 3$ не содержит цифр $1, 4, 7$. Докажите, что можно выбрать одну из его ненулевых цифр и вписать в число перед ней цифру на один меньше так, чтобы полученное число оказалось составным.

3. Вещественные числа a, b, c, d таковы, что $a^3+ab+b^3 = a^2+b^2; b^3+bc+c^3 = b^2+c^2; c^3+cd+d^3 = c^2+d^2$. На сколько могут отличаться числа a^3+ad+d^3 и a^2+d^2?

4. На окружности отмечено $2n$ точек: n красных и n синих. На одной из красных точек сидит красная лягушка, а на одной из синих сидит синяя. Каждую минуту красная лягушка перепрыгивает на следующую по часовой стрелке красную точку, и одновременно с ней синяя лягушка перепрыгивает на следующую против часовой стрелки синюю точку. Докажите, что для любого изначального расположения лягушек можно провести прямую так, что лягушки всегда будут находиться по разные стороны от этой прямой.

5. Простое число назовём особым, если на него делится сумма всех меньших простых чисел. Могут ли два последовательных простых числа быть особыми?

6. Петя и Вася играют в игру на доске 101×101. Они по очереди (начинает Петя) выбирают клетку, которая до этого никем не была выбрана, и проводят в ней красный отрезок от середины одной стороны до середины противоположной, причём Петя проводит только вертикальные отрезки, а Вася только горизонтальные. Игра заканчивается, когда в каждой из 101^2 клеток будет проведён отрезок. После этого Петя находит на доске самый длинный вертикальный красный отрезок, а Вася — горизонтальный. Выигрывает тот, у кого отрезок длиннее (если длины равны – игра заканчивается ничьей). Каким будет результат при правильной игре обоих игроков?

7. На клетчатой доске $a \times b$ закрасили несколько непересекающихся (в том числе по углу!) доминошек. Найдите все пары (a, b), для которых оставшуюся часть доски всегда можно разбить на доминошки (независимо от того, какие именно доминошки закрашены).