

## Степень вхождения двойки

1. Докажите, что при любом чётном  $n$  степень вхождения двойки в  $C_n^2$  меньше степени вхождения в  $n$ .
2. Даны три попарно различных натуральных числа  $a, b, c$ . Докажите, что число

$$(a + b)(b + c)(c + a)$$

не может быть степенью двойки.

3. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?
4. Может ли число  $n!$  делиться на  $2^n$ ?
5. Можно ли так подобрать три натуральных числа, чтобы их сумма квадратов была равна их удвоенному произведению?
6. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
7. (а) Докажите, что число  $1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n$  не может быть целым.  
(б) Докажите, что число  $1/3 + 1/5 + 1/7 + \dots + 1/(2n + 1)$  не может быть целым.
8. На доске написано натуральное число  $n$ . Каждую минуту число на доске стирают и вместо него записывают  $n/2$ , если число было чётным, или  $3n + 1$ , если число было нечётным. Докажите, что в этой последовательности обязательно встретится число делящееся на 4.