Самое первое неравенство

$a^2+b^2 \geq 2ab$ или $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (второе верно для неотрицательных a и b), причём равенство достигается только при $a=b$.

Докажите неравенства:

0. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

1. $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

2. $\dfrac{3x}{y}+\dfrac{y}{27x} \geq \dfrac{2}{3}$, где $x,\ y>0$

3. $(a^3+b)(a+b^3) \geq 4a^2b^2$, где $a,\ b \geq 0$

4. $\dfrac{a^2+4}{2} \geq \sqrt{a^2+3}$

5. $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$

6. $2\left(a+\dfrac{1}{a}\right)+a^2 \geq 4a$, где $a>0$

7. $a^2+\dfrac{1}{a^2+1} \geq 1$

8. $a^2+b^2+\dfrac{1}{a^2+2}+\dfrac{1}{b^2+1} > 1$

9. $a^2(b^2+1)+\dfrac{2}{a^2} \geq 2(b+1)$, где $a \neq 0$, b — любое

---

10. $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{xy}$, где $x,\ y>0$

11. Докажите, что если положительные числа a, b, c такие что

$$ab+bc+ca > a+b+c,$$

то

$$a+b+c > 3.$$

12. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc=1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a^2+(b+1)^2}+\frac{1}{1+b^2+(c+1)^2}+\frac{1}{1+c^2+(a+1)^2} \leq \frac{1}{2}.$$