

Разной по мотивам УрТЮМа

1. Найдите все натуральные n , для которых доску размером $n \times (n+2)$ можно разбить на прямоугольники 1×2 (прямоугольники можно поворачивать) и провести в каждом из них одну из диагоналей так, чтобы диагонали не имели общих концов.
2. В алфавите племени АУ-АУ всего две буквы. Словом называется любая последовательность из 11 букв. Два слова называются похожими, если они отличаются ровно в одной позиции. Докажите, что можно указать 1000 парно не похожих друг на друга слов.
3. Можно ли среди чисел $1, 2, 3, \dots, 1000$ выбрать 10 так, чтобы сумма никаких двух выбранных чисел не делилась на сумму никаких двух других выбранных чисел? Например, числа $1, 2, 4$ вместе брать нельзя, так как $2 + 4$ делится на $1 + 2$.
4. Отмечены 100 узлов на левой стороне квадрата 100×100 и 100 узлов его на нижней стороне, причем левый нижний узел не отмечен. Саша синим карандашом нарисовал n четырехугольников с отмеченными вершинами так, что никакие два не имеют общих точек. То же самое сделал красным карандашом сделал Игорь. При каком наименьшем n обязательно найдутся красный и синий четырехугольник, не имеющие общих точек?
5. Даны положительные числа a, b, c такие, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} > 2$$

6. Докажите, что существует более 10^{30} способов покрасить некоторые клетки белого квадрата 21×21 в чёрный цвет так, чтобы на каждой главной диагонали было покрашено нечётное число чёрных клеток, а на всех остальных диагоналях (даже из одной клетки) — чётное.
7. У натурального числа N ровно 16 натуральных делителей. Пронумеруем их в порядке возрастания: $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{16} = N$. Оказалось, что $d_9 - d_8 = 2$ и $d_{13} - d_4 = 245$. Найдите все возможные значения N .