

Алгебраическая теория чисел

- (а) Докажите, что число $n^2 + 2n + 7$ не является точным квадратом ни при каком натуральном n .

(б) При каких натуральных n число $n^2 + 2n + 12$ представляется в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?
- Можно ли представить число $(\frac{2023^2 + 2025^2}{2})^2$ в виде суммы двух квадратов натуральных чисел?
- Известно, что целые числа a, b, c удовлетворяют равенству $a + b + c = 0$. Докажите, что $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$ – квадрат целого числа.
- Целые числа m, n, k таковы, что $k^2 - m^2 - n^2 = 2(m - n)(k - m + n)$. Докажите, что $2mn$ – точный квадрат.
- Доказать, что не существует таких натуральных m, n что $m^2 + n$ и $n^2 + m$ являются точными квадратами.
- Про натуральные m, n известно, что $m+n+1$ простое и делит $2(m^2+n^2)-1$. Докажите, что $m = n$.
- Докажите, что найдутся числа натуральные числа $x, y, z > 20242024$ такие, что
$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1.$$
- Натуральные числа a, b таковы, что $a^3 + b^3$ делится на $a^2 + ab + b^2$, а число $a - b$ – простое. Докажите, что $a^3 - b^3$ – точная четвертая степень.