

## Алгебраическая теория чисел

- (а) Докажите, что число  $n^2 + 2n + 7$  не является точным квадратом ни при каком натуральном  $n$ .

(б) При каких натуральных  $n$  число  $n^2 + 2n + 12$  представляется в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?
- Можно ли представить число  $(\frac{2023^2 + 2025^2}{2})^2$  в виде суммы двух квадратов натуральных чисел?
- Известно, что целые числа  $a, b, c$  удовлетворяют равенству  $a + b + c = 0$ . Докажите, что  $2a^4 + 2b^4 + 2c^4$  – квадрат целого числа.
- Целые числа  $m, n, k$  таковы, что  $k^2 - m^2 - n^2 = 2(m - n)(k - m + n)$ . Докажите, что  $2mn$  – точный квадрат.
- Доказать, что не существует таких натуральных  $m, n$  что  $m^2 + n$  и  $n^2 + m$  являются точными квадратами.
- Про натуральные  $m, n$  известно, что  $m+n+1$  простое и делит  $2(m^2+n^2)-1$ . Докажите, что  $m = n$ .
- Докажите, что найдутся числа натуральные числа  $x, y, z > 20242024$  такие, что
$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = z^2 + 1.$$
- Натуральные числа  $a, b$  таковы, что  $a^3 + b^3$  делится на  $a^2 + ab + b^2$ , а число  $a - b$  – простое. Докажите, что  $a^3 - b^3$  – точная четвертая степень.