1. Дед Мороз катается на коньках по ледяному кольцу, двигаясь с постоянной скоростью. Одновременно из той же точки в том же направлении стартует Снегурочка. Она движется в 6,5 раз медленнее Деда. Когда Дед удаляется от Снегурочки (то есть, кратчайшее расстояние между ними растёт), она льёт слёзы, а когда приближается, то не льёт. Какое наименьшее количество целых кругов надо будет проехать Деду Морозу, чтобы к этому моменту Снегурочка залила слезами всё ледяное кольцо?

Ответ: 13 кругов.

Решение: Понятно, что Снегурочка для некоторого d чередует заплакиваемые и незаплакиваемые интервалы длины d, так как относительно неё Дед Мороз равномерно едет по кругу. Это d равно $1/11$ круга, так как относительно неё за такой же промежуток времени Дед Мороз укатывается на $(6,5-1)/11 = 1/2$ круга. Несложно понять, что она зальёт слезами весь круг ровно в тот момент, когда проедет $21/11$ круга. Дед Мороз при этом проедет $(21 \cdot 6,5)/11 = (21/22) \cdot 13$ кругов. От нас требуют целый ответ, поэтому округляем вверх, получаем 13.

2. Сколько разных примеров можно выложить из четырёх карточек с числами 0, 10, 100, 1000 и трёх карточек со знаками действий: ''$+$'' (прибавить), ''$\times$'' (умножить) и '':'' (разделить)? (В примере должны быть использованы все карточки, знаки действий должны стоять между числами и не должно быть деления на 0.)

Ответ: 108 примеров.

Решение: В каждом примере чередуются знаки и числа, начинаем с чисел. Наметим 4 места для чисел и 3 — для знаков, и сначала расставим знаки, а потом — числа. Знак ''$+$'' можно поставить на любое из трёх мест, знак ''$\times$'' — на любое из двух оставшихся, знак '':'' — на единственное оставшееся. Итого $3! = 6$ расстановок. Теперь расставим числа. 0 можно поставить на любое место, кроме места за знаком деления (3 варианта), 10 — на любое из 3 оставшихся, 100 — на любое из двух оставшихся, 1000 — на последнее оставшееся. Всего получаем $6 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 108$ примеров.

3. Клетки таблица 8×8 заполняются числами от 1 до 64. При этом число 1 можно поставить в любую клетку, затем число 2 нужно поставить в одну из свободных соседних по стороне клеток с 1, число 3 — в свободную соседнюю по стороне клетку с 2 и т.д. Какое наибольшее количество простых чисел может оказаться в одной строке?

Решение: Раскрасим клетки таблицы в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Тогда два последовательных числа занимают клетки противоположных цветов, а числа с одинаковой чётностью — клетки одного цвета. Кроме 2, все простые числа нечётные, а для нечётных чисел есть четыре места в любой строке и любом столбце. Следовательно, максимальное количество простых чисел, которое мы можем разместить в одной строке, равно 5. В таблице ниже показано, что это возможно.

2	3	6	7	10	11	28	29
1	4	5	8	9	12	27	30
18	17	16	15	14	13	26	31
19	20	21	22	23	24	25	32
40	39	38	37	36	35	34	33
41	42	43	44	45	46	47	48
56	55	54	53	52	51	50	49
57	58	59	60	61	62	63	64

4. Про некоторое натуральное число известно, что оно не делится на 7 и в его десятичной записи точно есть цифры 1, 3, 7, 9. Докажите, что в этом числе можно переставить цифры так, чтобы оно стало делиться на 7.

Решение: Пусть в исходном числе $k \geqslant 4$ цифры. Возьмём по одной цифре 1, 3, 7, 9 и подберём начало A из них. Из оставшихся $k-4$ цифр (если они есть) создадим число $B \geqslant 0$ (возможно, с лидирующими нулями), которое припишем после A. Заметим, что можно придумать 7 разных начал с разными остатками от деления на 7:

1379 — остаток 0 1793 — остаток 1 3719 — остаток 2 1739 — остаток 3
1397 — остаток 4 3197 — остаток 5 1973 — остаток 6

Докажем, что при приписывании начал с разными остатками от деления на 7 к одному и тому же числу-окончанию B будут получаться числа с разными остатками при делении на 7. Пусть A_i и A_j имеют разные остатки от деления на 7, т.е. $(A_i - A_j)$ не делится на 7. Тогда из взаимной простоты 7 и 10^{k-4} следует, что $(A_i - A_j) \cdot 10^{k-4}$ не делится на 7. Значит у чисел $A_i \cdot 10^{k-4}$ и $A_j \cdot 10^{k-4}$ разные остатки от деления на 7. Тогда при увеличении этих чисел на одно и то же число B (если оставшихся цифр нет, то факт уже доказан) получим числа $A_i \cdot 10^{k-4} + B = \overline{A_iB}$ и $A_j \cdot 10^{k-4} + B = \overline{A_jB}$ с разными остатками от деления на 7. Таким образом, для произвольного окончания B мы сможем подобрать одно из семи начал, чтобы число $\overline{AB}$ делилось на 7.

5. На доске написаны дроби $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{n-1}$. При каких n некоторые из дробей можно перевернуть, чтобы произведение написанных дробей (старых не перевёрнутых и новых перевёрнутых) было равно 1?

Ответ: при n, являющихся полным квадратом.

Решение: Если искомое переворачивание существует, то его можно сделать так, чтобы n оказалось в знаменателе, иначе перевернём все дроби. Сразу сократим число 1. После переворачивания некоторых дробей каждое из натуральных чисел от 2 до $n-1$ будет либо в степени 1 в числителе и знаменателе, либо в степени 2 только в одной части дроби. Заметим, что произведение квадратов натуральных чисел является квадратом натурального числа, поэтому после сокращения получим дробь вида $\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1}{n} = 1$. Тогда $\frac{a^2}{b^2} = n$. Все простые делители чисел a^2 и b^2 входят в чётных степенях в их разложения на простые множители. Число $\frac{a^2}{b^2} = n$ — натуральное, причём степени вхождения простых множителей в его разложение равны разностям соотвествующих степеней для чисел a^2 и b^2, т.е. чётным числам. Отсюда получаем, что число n обязательно является квадратом натурального числа. Искомый пример для $n = k^2$ можно построить, перевернув все дроби, начиная с $\frac{k+1}{k}$. Тогда все числа сократятся сами с собой, кроме k^2 в числителе и n в знаменателе, но $\frac{k^2}{n} = 1$, что и завершает докательство.

6. В олимпиаде участвовали 49 школьников. Им было предложено решить 3 задачи. Каждая задача оценивалась от 0 до 7 баллов. Докажите, что найдутся два школьника, первый из которых получил за каждую задачу не меньше баллов, чем второй.

Решение: Отметим точки трехмерного пространства с целыми координатами от 0 до

7. Всего их $8^3 = 512$ и расположены они внутри и на поверхности куба. *Цепью* назовем последовательность отмеченных точек $A_i = (x_i, y_i, z_i)$, такую что при переходе от A_k к A_{k+1} ровно одна координата увеличивается на 1.

Покроем все точки 48 цепями. Предъявим их в виде ломаных, указывая вершины:

1.1) $(0;0;0) - (0;0;7) - (0;7;7) - (7;7;7)$;
1.2) $(0;1;0) - (0;1;6) - (0;7;6) - (7;7;6)$;
1.3) $(0;2;0) - (0;2;5) - (0;7;5) - (7;7;5)$;
1.4) $(0;3;0) - (0;3;4) - (0;7;4) - (7;7;4)$;
1.5) $(0;4;0) - (0;4;3) - (0;7;3) - (7;7;3)$;
1.6) $(0;5;0) - (0;5;2) - (0;7;2) - (7;7;2)$;
1.7) $(0;6;0) - (0;6;1) - (0;7;1) - (7;7;1)$;
1.8) $(0;7;0) - (7;7;0)$;
2.1) $(1;0;0) - (1;0;7) - (1;6;7) - (7;6;7)$;
2.2) $(1;1;0) - (1;1;6) - (1;6;6) - (7;6;6)$;
2.3) $(1;2;0) - (1;2;5) - (1;6;5) - (7;6;5)$;
2.4) $(1;3;0) - (1;3;4) - (1;6;4) - (7;6;4)$;
2.5) $(1;4;0) - (1;4;3) - (1;6;3) - (7;6;3)$;
2.6) $(1;5;0) - (1;5;2) - (1;6;2) - (7;6;2)$;
2.7) $(1;6;0) - (1;6;1) - (7;6;1)$;
2.8) $(2;6;0) - (7;6;0)$;
3.1) $(2;0;0) - (2;0;7) - (2;5;7) - (7;5;7)$;
3.2) $(2;1;0) - (2;1;6) - (2;5;6) - (7;5;6)$;
3.3) $(2;2;0) - (2;2;5) - (2;5;5) - (7;5;5)$;
3.4) $(2;3;0) - (2;3;4) - (2;5;4) - (7;5;4)$;
3.5) $(2;4;0) - (2;4;3) - (2;5;3) - (7;5;3)$;
3.6) $(2;5;0) - (2;5;2) - (7;5;2)$;
3.7) $(3;5;0) - (3;5;1) - (7;5;1)$;
3.8) $(4;5;0) - (7;5;0)$;
4.1) $(3;0;0) - (3;0;7) - (3;4;7) - (7;4;7)$;
4.2) $(3;1;0) - (3;1;6) - (3;4;6) - (7;4;6)$;
4.3) $(3;2;0) - (3;2;5) - (3;4;5) - (7;4;5)$;
4.4) $(3;3;0) - (3;3;4) - (3;4;4) - (7;4;4)$;
4.5) $(3;4;0) - (3;4;3) - (7;4;3)$;
4.6) $(4;4;0) - (4;4;2) - (7;4;2)$;
4.7) $(5;4;0) - (5;4;1) - (7;4;1)$;
4.8) $(6;4;0) - (7;4;0)$;
5.1) $(4;0;0) - (4;0;7) - (4;3;7) - (7;3;7)$;
5.2) $(4;1;0) - (4;1;6) - (4;3;6) - (7;3;6)$;
5.3) $(4;2;0) - (4;2;5) - (4;3;5) - (7;3;5)$;
5.4) $(4;3;0) - (4;3;4) - (7;3;4)$;
5.5) $(5;3;0) - (5;3;3) - (7;3;3)$;
5.6) $(6;3;0) - (6;3;2) - (7;3;2)$;
5.7) $(7;3;0) - (7;3;1)$;
6.1) $(5;0;0) - (5;0;7) - (5;2;7) - (7;2;7)$;
6.2) $(5;1;0) - (5;1;6) - (5;2;6) - (7;2;6)$;
6.3) $(5;2;0) - (5;2;5) - (7;2;5)$;
6.4) $(6;2;0) - (6;2;4) - (7;2;4)$;
6.5) $(7;2;0) - (7;2;3)$;
7.1) $(6;0;0) - (6;0;7) - (6;1;7) - (7;1;7)$;
7.2) $(6;1;0) - (6;1;6) - (7;1;6)$;
7.3) $(7;1;0) - (7;1;5)$;
8.1) $(7;0;0) - (7;0;7)$

Всего цепей $8+8+8+8+7+5+3+1 = 48$ штук. Следовательно, если школьников $49 > 48$, то какая-нибудь цепь содержит результаты хотя бы двух школьников а значит, эти школьники — искомые.