Многочлены

1. На доске написано два многочлена — 0 и 1. Каждую минуту Лосяш стирает текущие многочлены $P(x), Q(x)$ и записывает вместо них новые:либо $P(x)+1$ и $Q(x)(45x+2025)$, либо $P(x)(45x+2025)$ и $Q(x)+1$. Могут ли в какой-то момент на доске быть написаны 2 одинаковых многочлена?

2. Многочлен $P(x)$ с натуральными коэффициентами таков, что для любого натурального n верно, что $P(n)|P(P(n)-2025)$. Докажите, что $P(-2025) = 0$.

3. Многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с вещественными коэффициентами не имеет вещественных корней. Докажите, что для любого ненулевого вещественного числа a многочлен $Q(x) = P(x) + aP'(x) + \ldots + a^n P^{(n)}(x)$ не имеет вещественных корней.

4. Два многочлена с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степени n обладают следующими свойствами: их старшие коэффициенты различаются на некоторое простое число, коэффициенты при x^{n-1} равны и они имеют общий ненулевой рациональный корень m. Докажите, что m — целый корень.

5. Многочлены с вещественными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $Q(x)$ получается из $P(x)$ перестановкой его коэффициентов. Оказалось, что для любого комплексного числа $z : |z| < 10$ верно $|P(z)| \geqslant |Q(z)|$. Правда ли, что количество комплексных z, при которых $|P(z)| = |Q(z)|$, бесконечно?

6. Найдите какой-нибудь многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами, удовлетворяющий следующему уравнению для всех вещественных $|x| \leqslant 1$: $P(x\sqrt{2}) = P(x + \sqrt{1-x^2})$.

7. Для многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами верно, что для всех $u, v \in \mathbb{N}$ выполняется $u^{2^{2025}} - v^{2^{2025}} | P(u) - P(v)$. Докажите, что существует многочлен $Q(x)$ такой, что $P(x) = Q(x^{2^{2025}})$.