# Разнобой по стереометрии

**1.** Через вершины основания четырехугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину $A$ — параллельно $SC$, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

**2.** Три диагонали правильной $n$-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке $O$. Докажите, что $O$ – центр призмы. (Диагональ призмы — это отрезок, соединяющий две ее вершины, не находящиеся в одной грани.)

**3.** В тетраэдре $ABCD$ все 4 высоты пересекаются в точке $H$. Прямая $DH$ пересекает плоскость $ABC$ в точке $P$, а описанную сферу тетраэдра в точках $D$ и $Q$. Докажите, что $PQ = 2HP$.

**4.** В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а его центр описанной сферы лежит в плоскости, проходящей через середины рёбер $AB$, $AC$, $AD$. Докажите, что основания высот из вершины $A$ граней $ABC, ACD, ADB$ лежат на одной прямой.

**5.** Плоскость $\Pi$ касается сферы с диаметром $AB$ в точке $A$. Из точки $C$ этой плоскости проведён отрезок $CD$ некоторой касательной к сфере (точка $D$ лежит на сфере). Прямая $BD$ пересекает плоскость $\Pi$ в точке $F$. Докажите, что $CA = CF$.

**6.** В неправильном тетраэдре $ABCD$ все грани равны, $O$ — центр его описанной сферы, $H$ — точка пересечения высот треугольника $BCD$. Докажите, что $AOH \perp BCD$.

**7.** В треугольнике $ABC$ биссектриса угла $A$ пересекает отрезок $BC$ в точке $L$. На отрезке $BC$ как на диаметре в пространстве построена окружность $\omega$ так, что её плоскость перпендикулярна плоскости $ABC$. Через точку $L$ проведена произвольная хорда $DE$ окружности $\omega$. Докажите, что прямая $AL$ — биссектриса угла $DAE$.

**8.** Дана четырехугольная пирамида $SABCD$. Диагонали основания $AC$ и $BD$ перпендикулярны друг другу и пересекаются в точке $P$. Оказалось, что $SP$ — высота пирамиды. Докажите, что точки пересечения высот четырех боковых граней лежат в одной плоскости.

**9.** Треугольная $SABC$ пирамида вписана в сферу $\Omega$. Докажите, что сферы, симметричные $\Omega$ относительно прямых $SA, SB, SC$ и плоскости $ABC$, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой $l$ — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой $l$.

**10.** Плоскость $\alpha$ пересекает ребра $AB, BC, CD$ и $DA$ тетраэдра $ABCD$ в точках $X, Y, Z, T$ соответственно. Оказалось, что точки $Y$ и $T$ лежат на окружности $\omega$, построенной на отрезке $XZ$ как на диаметре. Точка $P$ отмечена в плоскости $\alpha$ так, что прямые $PY$ и $PT$ касаются окружности $\omega$. Докажите, что середины ребер $AB, BC, CD, DA$ и точка $P$ лежат в одной плоскости.