Увертюра

1. Из 4 монет 3 настоящие, которые весят одинаково, и одна фальшивая, отличающаяся по весу от остальных. Чашечные весы без гирь таковы, что если положить на их чашки равные грузы, то любая из чашек может перевесить, если же грузы различны по массе, то обязательно перетягивает чашка с более тяжёлым грузом. За какое наименьшее число взвешиваний можно наверняка определить фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее?

2. Игорь написал на доске числа $1, 2, 3, \ldots, 100$, именно в таком порядке. Раз в минуту Паша отсчитывает $2k$ чисел с начала ряда при некотором целом k и следующие за ними четыре числа a, b, c, d меняет на два числа $ac + bd$ и $ad + bc$ в любом порядке. Через 49 минут на доске остались два числа. Докажите, что они не зависят от порядка действий.

3. В некоторых клетках доски $n \times n$ стоят мины. Внутри каждой клетки без мины написано количество соседних по стороне или углу заминированных клеток. Какова максимальная возможная сумма всех чисел на доске?

4. На олимпиаду приехало 100 учеников, некоторые из которых знакомы. Оказалось, что у любых двух незнакомых найдётся хотя бы семь общих знакомых. Докажите, что можно выбрать группу из хотя бы 14 учеников и рассадить их за круглый стол так, чтобы каждый был знаком со своими соседями.

5. Оля написала на карточках дроби вида $1/n$, где n — все возможные делители числа 6^{100} (включая единицу и само это число). Эти карточки она разложила в некотором порядке. После этого она записала на доску число на первой карточке, затем сумму чисел на первой и второй карточках, потом сумму чисел на первых трех карточках и т. д., наконец, сумму чисел на всех карточках. Каждую сумму Оля записывала на доску в виде несократимой дроби. Какое наименьшее количество различных знаменателей могло оказаться у чисел на доске?

6. В классе 25 учеников. Учитель хочет запасти N конфет, провести олимпиаду и раздать за успехи в ней все N конфет (решившие поровну задач должны получить поровну, решившие меньше — меньше, в том числе, возможно, и ноль конфет). При каком наименьшем N это будет возможно независимо от количества задач на олимпиаде и успехов учеников?