

## Теорема Эрдёша–Ко–Радо

1. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, любые два из которых пересекаются.

(а) Найдите максимальный возможный размер  $\mathcal{F}$  при  $2k > n$ .

(б) При  $2k \leq n$  приведите пример семейства размера  $C_{n-1}^{k-1}$ .

(в) (Теорема Эрдёша–Ко–Радо) Докажите, что при  $n \geq 2k$  максимальный размер семейства  $\mathcal{F}$  равняется  $C_{n-1}^{k-1}$ .

*(Рассмотрите всевозможные перестановки элементов  $n$ -элементного множества по кругу. Назовём множество из  $\mathcal{F}$  согласованным с перестановкой, если его элементы идут подряд в этой перестановке. Сколько множеств из  $\mathcal{F}$  могут быть согласованы с одной перестановкой? Со сколькими перестановками согласовано каждое множество из  $\mathcal{F}$ ?)*

2. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство  $k$ -элементных подмножеств  $n$ -элементного множества, никакие два из которых не дают в объединении все множество исходное  $n$ -элементное множество. Каков максимальный возможный размер  $\mathcal{F}$ ?

3. Сколько семейств  $\mathcal{F}$ , обладающих свойствами из задачи 1 и имеющих размер в точности  $C_{n-1}^{k-1}$ , существует при  $n = 2k$ ?

4. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство 4-элементных подмножества 8-элементного множества, любые два из которых пересекаются хотя бы по двум элементам. Может ли оказаться, что  $|\mathcal{F}| > 15$ ?

5. Используя идею из задачи 1, докажите ЛYM-неравенство: если  $\mathcal{S}$  — набор подмножеств  $n$ -элементного множества, никакие два из которых не вложены друг в друга, то

$$\sum_{A \in \mathcal{S}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \leq 1$$

6. Пусть  $\mathcal{F}$  — семейство подмножеств  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Операция  $(i, j)$ -сдвига при  $1 \leq i < j \leq n$  определяется следующим образом: для каждого множества  $A$  из  $\mathcal{F}$ , которое содержит  $j$  и не содержит  $i$ , определим  $A'$  как  $A \cup \{i\} \setminus \{j\}$ . Если  $A'$  не лежало в  $\mathcal{F}$ , заменим  $A$  на  $A'$ . (Проверьте, что результат не зависит от порядка рассмотрения множеств  $A$ .)

(а) Докажите, что операциями  $(i, j)$ -сдвига можно получить из  $\mathcal{F}$  семейство  $\mathcal{F}'$ , которое не будет изменяться ни при каком  $(i, j)$ -сдвиге. Такое семейство называется *сдвинутым*.

(б) Покажите, что теорему Эрдёша–Ко–Радо достаточно доказать для сдвинутых семейств.

(в) Докажите теорему Эрдёша–Ко–Радо индукцией по  $n$  и  $k$ . В качестве базы удобно брать  $n = 2k$ .