Клеточки, решётки

1. Правильный треугольник разбит на правильные треугольники со стороной 1 линиями, параллельными его сторонам и делящими каждую сторону на n частей. Какое наибольшее число отрезков длины 1 с концами в вершинах этих треугольников можно отметить так, чтобы не нашлось треугольника, все стороны которого состоят из отмеченных отрезков?

2. Грани куба $9 \times 9 \times 9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 со сторонами по сторонам клеток. Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

3. В выпуклом многоугольнике на плоскости содержится не меньше $m^2 + 1$ точек с целыми координатами. Докажите, что в нем найдется $m + 1$ точек с целыми координатами, которые лежат на одной прямой.

4. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят чёрные и белые фишки фишки. С доски сначала снимаются все чёрные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо чёрных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

5. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа расставить натуральные числа таким образом, чтобы при любых натуральных $m, n > 100$ сумма чисел в любом прямоугольнике $m \times n$ клеток делилась на $m + n$?

6. Квадратная доска разделена сеткой горизонтальных и вертикальных прямых на n^2 клеток со стороной 1. Известно, что можно так отметить n клеток, что любой прямоугольник площадью не менее n со сторонами, идущими по линиям сетки, содержал хотя бы одну отмеченную клетку. Найдите наибольшее возможное значение n.

7. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

8. Каждая клетка клетчатой плоскости раскрашена в один из n^2 цветов так, что в любом квадрате из $n \times n$ клеток встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов.