Конструктивы

1. Обозначим $a_n = \dfrac{2025}{n}$ для натуральных n. Докажите, что можно уложить без наложений квадраты со сторонами $a_2, a_3, \ldots$ в квадрат со стороной a_1.

2. Проктер и Гэмбл играют в игру. Ходят по очереди. Сначала Проктер пишет цифру. Затем каждый игрок в свой ход пишет цифру в любое место уже написанного числа (например, число 12 может превратиться в числа 121, 142, 012...). Гэмбл выигрывает, если число на доске в некоторый момент становится точным квадратом. Докажите, что Проктер может не дать Гэмблу выиграть.

3. Докажите, что есть такое натуральное $n > 2$, что остаток при делении числа 2^{2^n} на число $2^n - 1$ не является степенью 4.

4. Докажите, что существует такое натуральное m, что уравнение $\varphi(n) = m$ имеет не менее 2025 решений. (напоминание: $\varphi(n)$ — функция Эйлера, количество чисел, меньших n, взаимопростых с ним)

5. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы кубов трёх многочленов с действительными коэффициентами.

6. Разбейте множество $\mathbb{Z} \backslash \{3, 10, 22, 117\}$ на бесконечное количество непересекающихся бесконечных в обе стороны целочисленных арифметических прогрессий.

7. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\arctan 1, \arctan \dfrac{1}{2}, \ldots \arctan \dfrac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

8. Докажите, что для любого натурального n существует такое множество натуральных чисел S, что для любых $a, b \in S$ верно, что среди элементов S на число $a - b$ делятся только числа a, b.