Конструктивы

1. Проктер и Гэмбл играют в игру. Ходят по очереди. Сначала Проктер пишет цифру. Затем каждый игрок в свой ход пишет цифру в любое место уже написанного числа (например, число 12 может превратиться в числа 121, 142, 012...). Гэмбл выигрывает, если число на доске в некоторый момент становится точным квадратом. Докажите, что Проктер может не дать Гэмблу выиграть.

2. Докажите, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы кубов трёх многочленов с действительными коэффициентами.

3. Разбейте множество $\mathbb{Z}\setminus\{3, 10, 22, 117\}$ на бесконечное количество непересекающихся бесконечных в обе стороны целочисленных арифметических прогрессий.

4. Имеются абсолютно точные двухчашечные весы и набор из 50 гирь, веса которых равны $\arctan 1, \arctan \frac{1}{2}, \dots \arctan \frac{1}{50}$. Докажите, что можно выбрать 10 из них и разложить по 5 гирь на разные чаши весов так, чтобы установилось равновесие.

5. Докажите, что для любого натурального n существует такое множество натуральных чисел S, что для любых $a, b \in S$ верно, что среди элементов S на число $a - b$ делятся только числа a, b.

6. Докажите, что для любого натурального числа n найдется такая арифметическая прогрессия
$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}$$
что числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ натуральны и различны, и НОД$(a_i, b_i) = 1$.

7. Докажите, что в треугольнике Паскаля в некоторой строке есть такие 4 различных числа a, b, c, d, что верно $a = 2b, c = 2d$.

8. Пусть $k, m, p > 1$ — натуральные числа, $k - 1$ делится на p^2. Докажите, что существует такое вещественное α, что $\lfloor \alpha k^n \rfloor$ взаимно просто с m при любом натуральном n.