

Тренировочная олимпиада к ММО

1. Существуют ли четыре различных приведённых квадратных трёхчлена такие, что сумма любых двух из них имеет ровно один корень?
2. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.
3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n , обладающих следующим свойством: сумма всех делителей числа n больше $2n$, причём число $2n$ нельзя представить в виде суммы нескольких делителей n .
4. Пусть полином $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ с положительными коэффициентами имеет n корней. Верно ли, что $a_i^2 > a_{i-1} a_{i+1}$ для любого $i = 1, \dots, n-1$?
5. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые являются вершинами меньшего куба. Чему может быть равна длина его ребра?
6. Пусть X_1, \dots, X_{100} — различные непустые подмножества конечного множества S . Оказалось, что для любого $i \in \{1, \dots, 99\}$ множества X_i и X_{i+1} не пересекаются, а их объединение не совпадает с множеством S . Какое наименьшее количество элементов может содержать S ?