

Разнозадачи

1. Пусть O – центр окружности Ω , описанной около остроугольного треугольника ABC . На дуге AC этой окружности, не содержащей точку B , взята точка P . На отрезке BC выбрана точка X так, что $PX \perp AC$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BXP , лежит на окружности, описанной около треугольника ABO .
2. Боковые стороны трапеции AB и CD пересекаются в точке P , а её диагонали в точке Q . Известно, что описанная окружность треугольника PBC касается средней линии трапеции. Биссектриса угла P пересекает AD в точке K . Докажите, что $KQ \perp AD$.
3. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. На биссектрисе угла B внутри треугольника ABC нашлась единственная точка E такая, что $DE \perp AC$. Из точки E на сторону AB опущен перпендикуляр EH . Докажите, что треугольник ADH – равнобедренный.
4. Угол разделен выходящими из его вершины лучами на 2025 равных углов. Эти углы высекают на некоторой прямой 2025 отрезков. Докажите, что сумма длин 1-го, 3-го, \dots , 2025-го отрезков больше суммы длин остальных отрезков.
5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = AC\sqrt{2}$ и $BC + AD = BD\sqrt{2}$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.