Бензоколонки

1. По кругу написано несколько действительных чисел с неотрицательной (соответственно с положительной) суммой. Тогда найдется такое место, что все частичные суммы написанных чисел начиная с него по часовой стрелке неотрицательны (соответственно положительны).

2. **(а)** По кругу выписано несколько целых чисел с единичной суммой. Докажите, что есть ровно один способ выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

(б) По кругу в некотором порядке выписаны целые числа, не большие единицы, с суммой S. Докажите, что есть ровно S способов выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

3. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько бензоколонок. Известно, что суммарно бензина хватает, чтобы на машине объехать круг целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы стартовав в ней, машина могла объехать кольцевую дорогу по часовой стрелке и вернуться в исходное место.

4. Пусть в условиях задачи о бензоколонках суммарно бензина хватает, чтобы на машине проехать 2 круга целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы две машины могли объехать кольцевую дорогу, одна по часовой стрелке, а другая — против.

5. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдётся число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

6. Пусть $n > k \geqslant 1$. По кругу стоят n мальчиков и $n+1$ девочка. У каждого ребенка $2k$ соседей: k соседей слева и k справа. Докажите, что найдется девочка, среди соседей которой хотя бы k девочек.

7. На n карточках написаны целые числа, не большие, чем 1, с положительной суммой (например: 1,1,1,0,0,0,-2). Поднабор карточек назовем интересным, если сумма чисел на этих карточках равна 1. Для всякого интересного набора напишем на доске число $(k-1)!(n-k)!$, где k — число карточек в этом наборе. Докажите, что сумма выписанных на доску чисел равна $n!$. (В приведенном примере мы 3 раза напишем $0!\cdot 6!$, 9 раз $1!\cdot 5!$, 9 раз $2!\cdot 4!$, 4 раза $3!\cdot 3!$, 3 раза $4!\cdot 2!$, 3 раза $5!\cdot 1!$, 1 раз $6!\cdot 0!$ — в сумме $7!$)