Бензоколонки

1. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько бензоколонок. Известно, что суммарно бензина хватает, чтобы на машине объехать круг целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы стартовав в ней, машина могла объехать кольцевую дорогу по часовой стрелке и вернуться в исходное место.

2. **(а)** По кругу выписано несколько целых чисел с единичной суммой. Докажите, что есть ровно один способ выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

(б) По кругу в некотором порядке выписаны целые числа, не большие единицы, с суммой S. Докажите, что есть ровно S способов выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

3. Пусть в условиях задачи о бензоколонках суммарно бензина хватает, чтобы на машине проехать 2 круга целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы две машины могли объехать кольцевую дорогу, одна по часовой стрелке, а другая — против.

4. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдётся число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

5. На n карточках написаны целые числа, не большие, чем 1, с положительной суммой (например: 1, 1, 1, 0, 0, 0, -2). Поднабор карточек назовем *интересным*, если сумма чисел на этих карточках равна 1. Для всякого интересного набора напишем на доске число $(k-1)!(n-k)!$, где k — число карточек в этом наборе. Докажите, что сумма выписанных на доску чисел равна $n!$. (В приведенном примере мы 3 раза напишем $0!\cdot 6!$, 9 раз $1!\cdot 5!$, 9 раз $2!\cdot 4!$, 4 раза $3!\cdot 3!$, 3 раза $4!\cdot 2!$, 3 раза $5!\cdot 1!$, 1 раз $6!\cdot 0!$ — в сумме $7!$)

6. **(Теорема Эрдеша—Ко—Радо)** Докажите, что при $n \geqslant 2k$ максимальный размер семейства k-элементных подмножеств n-элементного множества, любые два из — C_{n-1}^{k-1}.

7. По кругу написаны неотрицательные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с нулевой суммой. Докажите *хитрым способом*, что найдется такое место, что все частичные суммы написанных чисел начиная с него по часовой стрелке неотрицательны. Хитрый способ начинается так: рассмотрим $(n-1)$-мерный симплекс с вершинами $(1,-1,0,0,\ldots,0), (0,1,-1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,-1), (-1,0,\ldots,0,1)$.

Проведем луч из начала координат в точку $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, он пересечет какую-то грань симплекса...