Разбиение ряда натуральных чисел

1. Множество целых чисел разбито в объединение непересекающихся бесконечных в обе стороны арифметических прогрессий с разностями d_i. Пусть $S = \sum \frac{1}{d_i}$.

(а) Докажите, что если множество прогрессий конечно, то $S = 1$.

(б) Докажите, что если множество прогрессий бесконечно, то $S \leqslant 1$.

(в) Докажите, что существует такое разбиение на бесконечное число прогрессий, что $S < 1$.

2. Существуют ли 1000 непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий натуральных чисел таких, что каждая из них содержит простое число, превосходящее 1000, и лишь конечное количество натуральных чисел в них не лежит?

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — возрастающая последовательность натуральных чисел с таким свойством, что существует $\varepsilon > 0$, что в любом отрезке $1, 2, \ldots, n$ содержится не меньше $n\varepsilon$ членов последовательности. Докажите, что можно выделить из неё бесконечную подпоследовательность чисел, ни одно из которых не делит другое.

4. Дан набор $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различных натуральных чисел, максимальное из которых равно n. Известно, что $\sum \frac{1}{a_i} \geqslant \frac{11}{10}$. Докажите, что среди чисел найдутся два, НОК которых не превосходит $10n$.

5. Будем говорить, что множество $S \subset \mathbb{N}$ обладает нулевой плотностью, если $\frac{1}{n}|S \cap \{1, 2, \ldots, n\}| \to 0$ при $n \to \infty$. Известно, что при любом $k \in \mathbb{N}$ множество $S \cap (S - k)$ имеет нулевую плотность. Следует ли из этого, что само множество S имеет нулевую плотность?