

Корни в ТЧ

1. По кругу сидят p обезьянок, где p — простое число. Дрессировщик раздаёт обезьянкам p орехов по следующему правилу. Одна из обезьянок получает первый орех, второй орех получает обезьянка, сидящая через две от первой против часовой стрелки (т.е. третья по счету), третий — обезьянка, сидящая через четыре против часовой стрелки от обезьянки, получившей второй орех, \dots , k -й орех получает обезьянка, сидящая через $2(k-1)$ от обезьянки, получившей $(k-1)$ -й орех, и так пока орехи не кончатся. Сколько обезьянок не получают ни одного ореха?
2. Докажите, что из каждого вычета по модулю $p > 2$ извлекается кубический корень тогда и только тогда, когда -3 не является квадратичным вычетом по модулю p .
3. Пусть p, q — простые числа. Докажите, что из каждого вычета по модулю p извлекается корень степени q тогда и только тогда, когда q не делит $p-1$.
4. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что числа $1, 2, \dots, p-1$ можно расставить по кругу так, что для любых трёх последовательных чисел a, b и c многочлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет кратный корень в \mathbb{Z}_p .
5. Пусть $p > 2$ — простое число. Во время урока учитель выписал на доску числа $1, 4, \dots, (p-1)^2$, а Петя прибавил к каждому из них 2025 и записал их себе в тетрадку. На перемене он посчитал количество чисел в тетрадке, для которых можно найти число с доски такое, что их разность делится на p , и вычел из него количество оставшихся чисел. Какое число могло получиться у Пети?
6. Натуральные числа a и b таковы, что $2a^2 - 1 = b^{15}$. Докажите, что если $a > 1$, то a кратно 5.