# Комбигеом

**1.** Отрезки $AB, BC, CA$ — соответственно диагонали квадратов $K_1, K_2, K_3$. Докажите, что если треугольник $ABC$ — остроугольный, то он полностью покрывается квадратами $K_1, K_2$ и $K_3$.

**2.** На плоскости отмечено несколько точек, каждая покрашена в синий, желтый или зеленый цвет. На любом отрезке, соединяющем одноцветные точки, нет точек этого же цвета, но есть хотя бы одна точка другого цвета. Какого максимально возможное число всех точек?

**3.** Внутри выпуклого стоугольника выбрано $k$ точек, $2 \leqslant k \leqslant 50$. Докажите, что можно отметить $2k$ вершин стоугольника так, чтобы все выбранные точки оказались внутри $2k$-угольника с отмеченными вершинами.

**4.** На плоскости нарисовано некоторое семейство правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами, причем любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник из этого семейства содержит хотя бы одну из них.

**5.** На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника, вершины которого образованы пересечениями диагоналей исходного пятиугольника, есть хотя бы одна целая точка.

**6.** Можно ли расположить в пространстве 12 прямоугольных параллелепипедов $P_1, P_2, ..., P_{12}$, рёбра которых параллельны координатным осям так, чтобы $P_2$ пересекался с каждым параллелепипедом, кроме $P_1$ и $P_3$, $P_3$ пересекался с каждым, кроме $P_2$ и $P_4$, и т.д., $P_{12}$ - со всеми, кроме $P_{11}$ и $P_1$, и, наконец, $P_1$ - со всеми, кроме $P_{12}$ и $P_2$?

**7.** В пространстве даны $n$ точек общего положения (никакие три не лежат на одной прямой, никакие четыре не лежат в одной плоскости). Через каждые три из них проведена плоскость. Докажите, что какие бы новые $n-3$ точки в пространстве мы ни взяли, найдётся плоскость, не содержащая ни одной из этих точек.

**8.** У выпуклого многогранника $2n$ граней ($n \geqslant 3$), и все грани являются треугольниками. Какое наибольшее число вершин, в которых сходится ровно 3 ребра может быть у такого многогранника?

**9.** Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.