

Стерео

1. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб. Основание высоты пирамиды — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что для любой точки на основании сумма расстояний до двух противоположных боковых граней равна сумме расстояний до двух других граней?
2. Для каждого из восьми сечений куба с ребром a являющихся треугольниками с вершинами в серединах ребер куба, рассматривается точка пересечения высот сечения. Найдите объем многогранника с вершинами в этих восьми точках?
3. Рассмотрим все тетраэдры $AХВУ$ описанные около данной сферы S . Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма $\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX$ не зависит от выбора точек X и Y .
4. Точки M и N — середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$. Оказалось, что $AN = DM$ и $CM = BN$. Докажите, что $AC = BD$.
5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит выпуклый четырехугольник $ABCD$, такой что $BC \cdot AD = BD \cdot AC$. Оказалось, что $\angle ADS = \angle BDS$ и $\angle ACS = \angle BCS$. Докажите, что плоскость SAB перпендикулярна плоскости основания.
6. В тетраэдре $PABC$ проведена высота PH . Из точки H на прямые PA , PB и PC опущены перпендикуляры HA_1 , HB_1 и HC_1 . Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются по прямой l . Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Докажите, что прямые OH и l перпендикулярны.
7. Пусть $ABCD$ — тетраэдр в трехмерном пространстве. Делая разрезы по ребрам AB , AC , AD и поворачивая грани ABC , ACD , ADB наружу в плоскость (BCD) , получаем развертку тетраэдра в многоугольник $BХСУDZ$. Пусть O_a — центр описанной окружности треугольника XYZ , H_a — основание высоты из A тетраэдра $ABCD$, K_a — середина AH_a . Обозначим через l_a прямую O_aK_a . Аналогично определим l_b, l_c, l_d . Докажите, что l_a, l_b, l_c, l_d пересекаются в одной точке.
8. Основание ABC тетраэдра $MABC$ — равносторонний треугольник, а боковые ребра MA , MB , MC — стороны треугольника площади S . Если R — радиус описанной сферы, а V — объем тетраэдра, докажите, что $RS \geq 2V$. Когда имеет место равенство?