[ЦПМ, кружок по математике, 11 класс]

[*2024-2025 уч. г.*] группа 11 *27 января 2025 г.*

Добрый комбинаторный разнобой

1. На шахматную доску 2025×2025 поставили 2025 ладей так, что ни одна из них не бьёт другую. Докажите, что в любом квадрате 1013×1013 стоит хотя бы одна ладья.

2. На съезде собрались 2025 кондитеров, каждый привёз мешок конфет своего сорта. В процессе общения кондитеры угощали друг друга конфетами. Известно, что для любой пары кондитеров если первый кондитер попробовал конфеты второго, то и второй попробовал конфеты первого. Когда все конфеты были съедены, оказалось, что среди любых четырёх кондитеров найдётся тот, кто попробовал конфеты троих оставшихся. Будем говорить, что кондитер *не любит сладкое,* если он попробовал конфеты не всех сортов. Какое наибольшее количество кондитеров могли не любить сладкое? (Свой сорт каждый кондитер, конечно же, попробовал).

3. Можно ли правильный шестиугольник со стороной длины n ($n \in \mathbb{N}$) разрезать на фигурки вида  (фигурка составлена из четырёх равносторонних треугольников со стороной 1)?

4. Два игрока играют в следующую игру. Изначально на доске записаны числа $2, 4, 6, \ldots, 2024$. За один ход можно уменьшить на один любое из написанных чисел. При этом если получившееся число равно нулю или равно какому-то из остальных чисел на доске, то получившееся число тут же стирается. Проигрывает игрок, после хода которого на доске не останется чисел. Кто выигрывает при правильной игре?

5. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.