

Тренировочная олимпиада

1. Плоскость замощена правильными шестиугольниками с единичной стороной. Каждый шестиугольник покрашен либо в белый, либо в чёрный цвет. Докажите, что найдутся два одноцветных шестиугольника, расстояние между центрами которых больше 2025, соединённые цепочкой шестиугольников того же цвета.
2. Пусть $0 \leq x, y \leq 1$. Докажите неравенство

$$2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \leq 2(1-x)(1-y) + 1.$$

3. Боковое ребро четырёхугольной пирамиды назовём *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведённые в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвёртое ребро также является хорошим.
4. В клетках таблицы 2000×2000 записаны числа 1 и -1 . Известно, что сумма всех чисел в таблице неотрицательна. Докажите, что найдутся 1000 строк и 1000 столбцов таблицы таких, что сумма чисел, записанных в клетках, находящихся на их пересечении, не меньше 1000.
5. Дан многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с целыми коэффициентами. Известно, что при подстановке в P различных наборов натуральных значений получаются различные числа. Докажите, что $\deg P \geq n$.