Ищем идеи

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно такие, что $AP = AQ$. На стороне BC выбраны точки R и S ($BR > BS$) таким образом, что $\angle BRP = \angle BPS$ и $\angle CSQ = \angle CQR$. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

2. На стороне AB равносторонней трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) отметили точки E и F так, что в четырехугольник $CDEF$ — описанный. Докажите, что описанные окружности треугольников ADE и BCF касаются.

3. Пусть D — середина меньшей дуги BC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в треугольники BAD и CAD. Докажите, что одна из общих касательных к ним параллельна BC.

4. Точки M и N — середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AN и DM пересекаются в точке E. На стороне BC отмечена точка F так, что четырехугольник $MENF$ — вписанный. Прямая AD вместе с лучами FM и NE образуют треугольник Δ_1, а вместе с лучами ME и FN — треугольник Δ_2. Докажите, что описанные окружности треугольников Δ_1 и Δ_2 касаются.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ взята такая точка P , что $\angle PDA = \angle PBA$. Пусть ω_1 — вневписанная окружность треугольника PAB, лежащая напротив вершины A. Пусть ω_2 — вписанная окружность треугольника PCD. Докажите, что одна из общих касательных к ω_1 и ω_2 параллельна AD.