Тренировочная олимпиада

1. Среди N последовательных шестизначных чисел цифра 7 встречается ровно в $1/12$ из них. Найдите наибольшее возможное значение N.

2. На шахматной доске стоят k ладей. Известно, что каждая клетка, на которой не стоит ладья, бьётся хотя бы тремя ладьями. Найдите наименьшее возможное значение k. (Ладья бьёт клетку, если они находятся в одной строке или одном столбце, а также между ними нет других ладей.)

3. Натуральные числа a, b, c взаимно просты в совокупности. Докажите, что существует натуральное n такое, что при любом натуральном k число $a^k + b^k + c^k$ не делится на 2^n.

4. На доске написано уравнение

$$(x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \ldots \cdot (x^2 + *x + *) =$$
$$= (x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \ldots \cdot (x^2 + *x + *),$$

в обеих частях перемножаются по 20 квадратных трёхчленов. Петя и Вася по очереди (начинает Петя) меняют коэффициенты $*$ на действительные числа, отличные от 0. Петя хочет, чтобы после последнего хода Васи получившееся уравнение имело действительный корень. Может ли Вася ему помешать?

5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ верны равенства

$$\angle A = \angle C = \angle E, \qquad \angle B = \angle D = \angle F.$$

Кроме того, биссектрисы углов A, C, E пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектрисы углов B, D, F также пересекаются в одной точке.