Разнобой по алгебре

1. Числовое множество K, содержащее 2025 различных чисел, таково, что для любых двух различных элементов a, b из K число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что для любого a из K число $a\sqrt{2}$ рационально.

2. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один действительный корень, а сумма любых двух не имеет действительных корней?

3. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(f(x)) = x^{2025}$ при всех действительных x.
Найдите $f(-1) + f(0) + f(1)$.

4. Даны действительные числа $x > 1, y > 1, z > 1$. Докажите, что

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x-1}{y-1} + \frac{y-1}{z-1} + \frac{z-1}{x-1}.$$

5. Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами маленьким, если $|f(n)| < 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?

6. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2 - f(y)^2$. Нашлись такие действительные числа x_0 и y_0, что $f(x_0+y_0)f(x_0-y_0) > f(x_0)^2 - f(y_0)^2$. Докажите, что функция f либо неотрицательная, либо неположительная.

7. Существует ли такое конечное множество K ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдётся многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества K, все корни которого действительны и также принадлежат K?

8. Пусть $(a_1, \ldots, a_{2025})$ — перестановка чисел $(1, \ldots, 2025)$, такая что $\big(|a_1-a_2|, |a_2 - a_3|, \ldots, |a_{2024} - a_{2025}|\big)$ — перестановка чисел $(1, \ldots, 2024)$. Докажите, что $\max(a_1, a_{2025}) \geqslant 507$.