

Разнойбой

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL . Точки O , O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABC , ABL и ACL соответственно. Докажите, что $OO_1 = OO_2$.
2. Три окружности ω_1 , ω_2 , ω_3 проходят через одну точку D и пересекаются вторично в точках A , E , F . Известно, что ω_3 проходит через центр B окружности ω_2 . Прямая EF вторично пересекает ω_1 в точке G . Докажите, что $\angle GAB = 90^\circ$.
3. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC . Точки P, Q, R выбраны на сторонах AB , BC , CA соответственно так, что $AP = AR$ и $BP = BQ$, и $\angle PIQ = \angle BAC$. Докажите, что $QR \perp AC$.
4. На высотах AD , BE , CF остроугольного треугольника взяты точки X , Y , Z соответственно так, что $S(BCX) + S(CAY) + S(ABZ) = S(ABC)$. Докажите, что окружность (XYZ) проходит через ортоцентр.
5. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$. На стороне CD взята такая точка P , что угол EAP равен 60° . Серединный перпендикуляр к отрезку AP пересекает BC в точке Q . Найдите угол AQP .