Тренировочная олимпиада

1. За круглым столом сидят 10 человек. Каждый из них задумал некоторое число и сообщил это число своим соседям по столу (одному соседу слева и одному справа). После этого каждый сидящий за столом назвал вслух среднее арифметическое двух чисел, которые ему сообщили его соседи. В порядке обхода вокруг стола были названы числа $1, 2, \ldots 10$. Какое число задумал человек, назвавший число 6?

2. На правой ветви гиперболы $y = 1/x$ взяты точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, абсциссы которых равны $a, 2a, \ldots, 2^9 a$ соответственно ($a > 0$). Найдите площадь десятиугольника $A_1, A_2, \ldots A_n$.

3. В треугольнике ABC угол $\angle A$ наименьший. На сторонах AB и AC отмечены точки D и E соответственно таким образом, что $\angle CBE = \angle DCB = \angle BAC$. Докажите, что середины отрезков AB, AC, BE, CD лежат на одной окружности.

4. Для фиксированного натурального числа $n \geqslant 2$ определим последовательность $a_k = \text{НОК}(k, k+1, \ldots, k+(n-1))$. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$, для которых последовательность a_k с некоторого момента строго возрастает.

5. В городе N центральная площадь имеет вид прямоугольника $2n \times 2m$, составленного из плиток 1×1. Для освещения площади в углах плиток (в том числе на границе площади) расставляют фонари так, что каждый фонарь освещает все плитки, в углу которых он стоит. Найдите наименьшее количество фонарей, которое можно расставить так, чтобы фонари освещали всю площадь, даже если одн из них перегорит.