Последовательный разнобой

1. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все её члены различны.

2. Существует ли такая последовательность натуральных чисел, чтобы любое натуральное число $1, 2, 3, \ldots$ можно было представить единственным способом в виде разности двух чисел этой последовательности?

3. Из натуральных чисел составляются последовательности, в которых каждое последующее число больше квадрата предыдущего, а последнее число в последовательности равно 2024 (последовательности могут иметь разную длину). Доказать, что различных последовательностей такого вида меньше, чем 2024.

4. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}_{n=1,2,..}$ каждое натуральное число встречается хотя бы один раз, и для любых различных n и m выполнено неравенство
$$\frac{1}{2019} < \frac{|a_n - a_m|}{|n-m|} < 2019.$$
Докажите, что тогда $|a_n - n| < 3000000$ для всех натуральных n.

5. Дано натуральное n. Пусть $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — два набора натуральных чисел длины n. Будем говорить, что $A \geqslant B$, если для всех i выполнено $a_i \geqslant b_i$. Бесконечное множество состоит из наборов натуральных чисел длины n. Докажите, что в этом множестве найдётся два набора X и Y таких что $X \geqslant Y$.

6. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придется выписать?

7. В концах отрезка пишутся две единицы. Посередине между ними пишется их сумма число 2. Затем посередине между каждыми двумя соседними из написанных чисел снова пишется их сумма и так далее 2019 раз. Сколько раз будет написано число 2019?