Геометрический разнобой

1. Дан четырехугольник $ABCD$ в котором $AB = CD$. Пусть P – точка пересечения его диагоналей. Докажите, что ортоцентр треугольника BPC равноудален от середин отрезков AB и CD.

2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть B_2 и C_2 — точки на отрезках BH и CH соответственно такие, что $BB_2 = B_1H$ и $CC_2 = C_1H$. Описанная окружность треугольника B_2HC_2 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках D и E. Докажите, что треугольник DEH прямоугольный.

3. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть E — ближайшая к A точка пересечения ω и диагонали AC. Точка F диаметрально противоположна точке E на окружности ω. Касательная к ω в точке F пересекает прямые AB, BC, AD и CD в точках A_1, C_1, A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что $A_1C_1 = A_2C_2$.

4. В треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего угла $\angle BAC$ пересекают прямую BC в D и E соответственно. Пусть F — вторая точка пересечения прямой AD с описанной окружностью треугольник ABC. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а D_0 — отражение D относительно O. Докажите, что $\angle D_0FE = 90°$.

5. Пусть ABC — остроугольный треугольник с центром описанной окружности O и ортоцентром H. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC, а N — середина OH. Касательные к ω в точках B и C и прямая, проходящая через H перпендикулярно прямой AN образуют треугольник Δ_a. Обозначим через ω_a описанную окружность Δ_a. Определим ω_b и ω_c аналогично. Докажите, что общие хорды ω_a,ω_b и ω_c пересекаются на прямой OH.