

Разнойбой

1. Дан квадратный трехчлен $f(x)$. Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени $g(x)$, что уравнение $f(g(x)) = 0$ не имеет решений?
2. Натуральное число $n > 100$ разделили с остатком на 10, 35 и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число n составное.
3. Про попарно различные числа a, b, c известно, что $a = ab + c$, $b = bc + a$, $c = ca + b$. Какие значения может принимать выражение $a + b + c$?
4. Пусть a, b — натуральные числа такие, что $a!b!$ делится на $a! + b!$. Докажите, что $3a \geq 2b + 2$.
5. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство $\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.
6. Дано простое $p > 3$. Для каждого натурального $k \leq p - 1$ обозначим x_k число, не превосходящее $p - 1$ и такое, что $kx_k - 1$ кратно p , а n_k определим равенством $kx_k = 1 + pn_k$. Докажите, что $\sum_{k=1}^{p-1} kn_k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$.