

## Разнойой

1. Дан квадратный трехчлен  $f(x)$ . Всегда ли можно найти такой многочлен четвертой степени  $g(x)$ , что уравнение  $f(g(x)) = 0$  не имеет решений?
2. Натуральное число  $n > 100$  разделили с остатком на 10, 35 и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число  $n$  составное.
3. Про попарно различные числа  $a, b, c$  известно, что  $a = ab + c$ ,  $b = bc + a$ ,  $c = ca + b$ . Какие значения может принимать выражение  $a + b + c$ ?
4. Пусть  $a, b$  — натуральные числа такие, что  $a!b!$  делится на  $a! + b!$ . Докажите, что  $3a \geq 2b + 2$ .
5. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab + bc + ca = 1$ . Докажите неравенство  $\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$ .
6. Дано простое  $p > 3$ . Для каждого натурального  $k \leq p - 1$  обозначим  $x_k$  число, не превосходящее  $p - 1$  и такое, что  $kx_k - 1$  кратно  $p$ , а  $n_k$  определим равенством  $kx_k = 1 + pn_k$ . Докажите, что  $\sum_{k=1}^{p-1} kn_k \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$ .