Разнобой

1. Натуральное число $n > 100$ разделили с остатком на $10, 35$ и 42. Оказалось, что сумма остатков от деления на 35 и 42 равна остатку от деления на 10. Докажите, что число n составное.

2. Корни многочлена $F(z)$ степени n над полем комплексных чисел располагаются в вершинах правильного n-угольника. Доказать, что корни производной $F'(z)$ совпадают и расположены в центре этого n- угольника.

3. Пусть a, b — натуральные числа такие, что $a!b!$ делится на $a!+b!$. Докажите, что $3a \geqslant 2b + 2$.

4. Положительные числа a, b, c таковы, что $ab + bc + ca = 1$. Докажите неравенство $\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

5. Ненулевой многочлен $P(x)$ имеет рациональные коэффициенты и не раскладывается в произведение двух многочленов меньшей степени с рациональными коэффициентами. Докажите, что никакие три его комплексных корня не образуют арифметическую прогрессию.

6. Дано простое $p > 3$. Для каждого натурального $k \leqslant p - 1$ обозначим x_k число, не превосходящее $p-1$ и такое, что $kx_k - 1$ кратно p, а n_k определим равенством $kx_k = 1 + pn_k$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{p-1} kn_k \equiv \frac{p-1}{2} \ (mod\ p)$.