

Дисперсия

Disclaimer. В этом листике мы почти всегда говорим только о случайных величинах, принимающих конечное число значений.

Определение. Дисперсией случайной величины X называется число

$$DX = E(X - EX)^2$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины, то есть, насколько сильно её значения могут отклоняться от среднего.

Напомним, что *индикатором* события A называется случайная величина I_A , равная 1, если A произошло, и 0 иначе. У индикатора есть несколько замечательных свойств:

- $E I_A = P(A)$
- $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$
- $D I_A$ — это что-то хорошее. Что?

Чтобы найти математическое ожидание или дисперсию случайной величины, может быть удобно представить её в виде суммы индикаторов.

1. Докажите следующие свойства дисперсии:

(а) $D(X + c) = D(X)$, если c — константа;

(б) $D(cX) = c^2 D(X)$, если c — константа; (в) $DX = EX^2 - (EX)^2$.

2. Докажите, что если случайные величины X и Y независимы, то

(а) $E(XY) = EX \cdot EY$; (б) $D(X + Y) = DX + DY$.

3. В лотерее играет 10^6 билетов и разыгрывается 1000 призов по 10000 рублей, 100 призов по 100000 рублей и джекпот в миллион рублей. Найдите дисперсию выигрыша одного билета.

4. Меткий ковбой Джо выстрелил в мишень n раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, если известно, что вероятность попадания каждым выстрелом равна p и выстрелы независимы.

5. Теперь Джо решил стрелять в мишень, пока не попадет. Найдите математическое ожидание и дисперсию номера первого попадания.

6. На празднике 2000 школьников выстроились в круг. Внезапно каждый из них подарил по конфетке своему случайному (правому или левому) соседу. Найдите мат. ож. и дисперсию числа школьников, которым никто не подарил конфетку.

7. Из деревни Сафонтьево в поселок Гидроузел им. Куйбышева по узкой дороге в случайном порядке выехали 100 автомобилей. Каждый, пока может, едет со своей скоростью, двух автомобилей с одинаковыми скоростями нет. Обгонять нельзя, поэтому очень скоро автомобили сбились в группы. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа получившихся групп.