

## Дисперсия

**Disclaimer.** В этом листике мы почти всегда говорим только о случайных величинах, принимающих конечное число значений.

**Определение.** Дисперсией случайной величины  $X$  называется число

$$DX = E(X - EX)^2$$

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины, то есть, насколько сильно её значения могут отклоняться от среднего.

Напомним, что *индикатором* события  $A$  называется случайная величина  $I_A$ , равная 1, если  $A$  произошло, и 0 иначе. У индикатора есть несколько замечательных свойств:

- $E I_A = P(A)$
- $I_{A \cap B} = I_A \cdot I_B$
- $D I_A$  — это что-то хорошее. Что?

Чтобы найти математическое ожидание или дисперсию случайной величины, может быть удобно представить её в виде суммы индикаторов.

1. Докажите следующие свойства дисперсии:

(а)  $D(X + c) = D(X)$ , если  $c$  — константа;

(б)  $D(cX) = c^2 D(X)$ , если  $c$  — константа;      (в)  $DX = EX^2 - (EX)^2$ .

2. Докажите, что если случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, то

(а)  $E(XY) = EX \cdot EY$ ;      (б)  $D(X + Y) = DX + DY$ .

3. В лотерее играет  $10^6$  билетов и разыгрывается 1000 призов по 10000 рублей, 100 призов по 100000 рублей и джекпот в миллион рублей. Найдите дисперсию выигрыша одного билета.

4. Меткий ковбой Джо выстрелил в мишень  $n$  раз. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа попаданий, если известно, что вероятность попадания каждым выстрелом равна  $p$  и выстрелы независимы.

5. Теперь Джо решил стрелять в мишень, пока не попадет. Найдите математическое ожидание и дисперсию номера первого попадания.

6. На празднике 2000 школьников выстроились в круг. Внезапно каждый из них подарил по конфетке своему случайному (правому или левому) соседу. Найдите мат. ож. и дисперсию числа школьников, которым никто не подарил конфетку.

7. Из деревни Сафонтьево в поселок Гидроузел им. Куйбышева по узкой дороге в случайном порядке выехали 100 автомобилей. Каждый, пока может, едет со своей скоростью, двух автомобилей с одинаковыми скоростями нет. Обгонять нельзя, поэтому очень скоро автомобили сбились в группы. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа получившихся групп.