Расширения полей

Числовым полем будем называть подмножество $\mathbb{K}$ комплексных чисел, являющееся полем относительно сложения и умножения. Если $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ — числовые поля, то $\mathbb{L}$ называется *расширением* поля $\mathbb{K}$. Размерность $\mathbb{L}$ как векторного пространства над $\mathbb{K}$ называется *степенью расширения* и обозначается $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Два поля называются *изоморфными,* если между ними существует биекция, сохраняющая сумму и произведение.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$. Символом $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ будем обозначать минимальное по включению числовое поле, включающее $\mathbb{K}$ и содержащее все x_i.

Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ — числовые поля, $\alpha \in \mathbb{L}$. Элемент α называется *алгебраическим* над полем $\mathbb{K}$, если существует многочлен $P(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ такой, что $P(\alpha) = 0$; в противном случае α называется *трансцендентным* над $\mathbb{K}$. Для алгебраического α многочлен $P(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$ наименьшей степени, удовлетворяющий $P(\alpha) = 0$, называется *минимальным многочленом* α над $\mathbb{K}$. Если все элементы $\mathbb{L}$ алгебраические над $\mathbb{K}$, то говорят, что поле $\mathbb{L}$ — *алгебраическое расширение* поля $\mathbb{K}$.

1. Какие элементы $\mathbb{C}$ являются алгебраическими над $\mathbb{R}$, а какие — трансцендентными?

2. Докажите, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ для любого числового поля $\mathbb{K}$.

3. **(а)** Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ есть множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.
(б) Найдите такое же представление для $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ и вычислите $\big[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \ : \ \mathbb{Q}\big]$.

4. Пусть α — трансцендентный над $\mathbb{Q}$ элемент. Докажите, что поле $\mathbb{Q}[\alpha]$ изоморфно полю рациональных функций над $\mathbb{Q}$.

5. Пусть $\mathbb{K}$ — числовое поле, а $\alpha \in \mathbb{C}$ — алгебраический элемент над $\mathbb{K}$. Докажите, что минимальный многочлен $P(x)$ элемента α над $\mathbb{K}$ неприводим (в кольце многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$), и что любой многочлен $Q(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, удовлетворяющий $Q(\alpha) = 0$, делится на $P(x)$.

6. **(а)** Пусть α, β — корни одного и того же неприводимого многочлена степени n над $\mathbb{K}$. Докажите, что поля $\mathbb{K}[\alpha]$ и $\mathbb{K}[\beta]$ изоморфны.
(б) Обязательно ли эти поля совпадают?

7. Пусть α — корень неприводимого над $\mathbb{K}$ многочлена степени n. Докажите, что $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ — базис в пространстве $\mathbb{K}[\alpha]$ над $\mathbb{K}$.

8. **Теорема об алгебраичности конечного расширения.** Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ и $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = n$. Докажите, что каждый элемент из $\mathbb{L}$ — корень некоторого многочлена степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{K}$.

9. **Лемма о башне.** Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$. Докажите, что расширение $\mathbb{M}$ над $\mathbb{K}$ конечно тогда и только тогда когда конечны расширения $\mathbb{M}$ над $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}$ над $\mathbb{K}$, причем $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] \cdot [\mathbb{M} : \mathbb{L}]$.

10. Пусть α, β — алгебраические элементы над $\mathbb{K}$, $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}] = n$, $[\mathbb{K}[\beta] : \mathbb{K}] = m$ и $(m, n) = 1$. Докажите, что $[\mathbb{K}[\alpha, \beta] : \mathbb{K}] = mn$.

11. **Теорема.** Пусть $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$. Тогда элементы $\mathbb{L}$, алгебраические над $\mathbb{K}$, образуют поле.

(а) Докажите теорему непосредственно: для α и β, алгебраических над $\mathbb{K}$, постройте многочлены из $\mathbb{K}[x]$, корнями которых являются элементы $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ и $1/\alpha$.

(б) Докажите теорему при помощи леммы о башне.

12. Чему равна размерность расширения $\left[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[7]{7}] : \mathbb{Q}\right]$?

13. Пусть α, β — два корня многочлена $x^3 - 17$. Найдите размерность расширения $[\mathbb{Q}[\alpha, \beta] : \mathbb{Q}]$.

14. Докажите, что $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{11}\right] \not\ni \sqrt[5]{13}$.

15. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Докажите, что

$$\left[\mathbb{Q}[\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}] : \mathbb{Q}\right] = 2^n.$$