Стереометрический разнобой

1. В тетраэдре провели четыре отрезка, соединяющие вершины с центрами вписанных окружностей противоположных граней. Докажите, что если два таких отрезка пересекаются, то два других тоже.

2. Вписанная и вневписанная сферы треугольной пирамиды $ABCD$ касаются её грани BCD в различных точках X и Y. Докажите, что треугольник AXY тупоугольный.

3. Высота четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проходит через точку пересечения диагоналей её основания $ABCD$. Из вершин основания опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA и SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 проходят через одну точку.

4. Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

5. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке. Докажите, что эта точка, основание одной из высот, а также точки, делящие остальные высоты в отношении $2 : 1$, считая от вершин, лежат на одной сфере.

6. Точка O лежит в основании $A_1A_2 \dots A_n$ пирамиды $SA_1 \dots A_n$, причём $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$ и $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$. При каком наименьшем n отсюда следует, что SO — высота пирамиды?

7. В пространстве даны прямая l и точка A, не лежащая не ней. XY — общий перпендикуляр к прямой l и произвольной прямой AY (X лежит на l). Найдите ГМТ Y по всем возможным прямым, проходящим через A.

8. Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер тетраэдра, делит его объём пополам.

9. Могут ли четыре центра вписанных окружностей граней тетраэдра лежать в одной плоскости?