Тригонометрия

1. Вычислите следующие произведения: **(а)** $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$; **(б)** $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$; **(в)** $\cos\frac{\pi}{19}\cos\frac{2\pi}{19}\cos\frac{3\pi}{19}\ldots\cos\frac{18\pi}{19}$.

2. Числа a и b таковы, что первое уравнение системы

$$\begin{cases} \sin x + a = bx, \\ \cos x = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения. Докажите, что система имеет хотя бы одно решение

3. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

4. Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \ldots \cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leqslant \frac{3}{2^{k+1}}$.

5. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a, b и такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки

6. Для углов α, β, γ справедливо неравенство $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$. Докажите, что

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}.$$

7. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay) = 1, \\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by) = 1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

8. Дано число $0 < \varphi < \pi$. Докажите, что существует такая константа C, что для любого натурального n сумма

$$|\cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi| < C.$$

9. Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.